

**Semana 11. Transformada de Laplace.**

11.1 Calcule a transformada de Laplace de

(a)  $\text{sen}(\sqrt{2}t)$ ,

(b)  $t^3$ ,

(c)  $t^2 e^{at}$ ,

(d)  $\cosh bt$ ,

(e)  $e^{at} \cos bt$ ,

(f)  $t^2 \cos bt$ .

11.2 Calcule a transformada de Laplace inversa de

(a)  $\frac{3s + 1}{s^2 + 4}$ ,

(b)  $\frac{s^2 - 5}{s^3 + 4s^2 + 3s}$ ,

(c)  $8(s^4 + 10s^2 + 9)^{-1}$ ,

(d)  $(s^2 - 1)^{-2}$ ,

(e)  $\frac{2s}{(s + 3)^2 + 1}$ .

11.3 Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

(a)  $y''' - 4\pi y'' + 3\pi^2 y' = 10\pi^3 \cos(\pi t)$ ,  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = 4\pi$ ,  $y''(0) = 7\pi^2$ ,

(b)  $y'' - 3\pi y' + 2\pi^2 y = \pi^2 e^{\pi t}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = \pi$ .

11.4 Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

(a)  $y'' + y' - 2y = e^t + \cos(t)$ ,

(b)  $y'' - 2y' + y = t$ ,

(c)  $y'' + y = \cos(t)$ .

11.5 Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

(a)  $y''' - y'' + y' - 1 = 0$ ,

(b)  $y''' - 4y' = 8t - 16\text{sen}(2t)$ ,

(c)  $y'' - 3y' + 2y = te^{2t}$ .

11.6 Utilizando a transformada de Laplace resolva os seguintes problemas de valor inicial (onde  $H$  e por  $\delta$  designam respectivamente, a função de Heaviside e a “função” delta de Dirac com suporte na origem)

- (a)  $y'' + 2y' + 2y = h(t)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$       $h(t) = \begin{cases} 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & 0 \leq t < \pi \text{ e } t \geq 2\pi, \end{cases}$
- (b)  $y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi)$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,
- (c)  $y'' + 4y = H(t - \pi) - H(t - 2\pi)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,
- (d)  $y'' + y = \delta(t - \pi)\cos t$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

11.7 Os polinómios de Laguerre são definidos por

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \left( \frac{d}{dt} \right)^n (t^n e^{-t}) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Mostre que  $\mathcal{L}[L_n(t)] = (s-1)^n / s^{n+1}$  e que

$$t \frac{d^2}{dt^2} L_n + (1-t) \frac{d}{dt} L_n + n L_n = 0.$$

**Semana 12. Problemas de valor fronteira e séries de Fourier**

12.1 Determine os valores de  $\lambda$  para os quais os seguintes problemas de valores fronteira têm soluções não triviais.

a)  $y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

b)  $y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi).$

12.2 Calcule a série de Fourier da função  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ +1 & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

12.3 Determine a série de Fourier da função  $f(x) = x$ , no intervalo  $] -1, 1[$ , indicando o respectivo conjunto de convergência pontual.

12.4 Desenvolva a função definida no intervalo  $[0, 1]$  por  $f(x) = x$  numa série de cossenos e indique para que valores converge pontualmente a série obtida.

12.5 Seja a função  $f$  definida no intervalo  $(0, \pi)$  por  $f(x) = \text{sen}(x)$ . Determine a série de Fourier de cossenos da função  $f$ , indicando o respectivo conjunto de convergência pontual.

12.6 Determine a série de Fourier da função  $g(x) = L - |x|$ , no intervalo  $[-L, L]$ . Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

12.7 a) Calcule, utilizando o Teorema dos Resíduos, os integrais

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{5 + 4\cos x} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

b) Deduza, da alínea anterior, os valores de

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{5 + 4\cos x} dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{sen } nx}{5 + 4\cos x} dx.$$

c) Diga, justificando, qual o valor da soma da série  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \text{sen } nx$  para cada  $x \in [-\pi, \pi]$ .

**Semana 13. Equações diferenciais parciais**

13.1 Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para  $t \geq 0$  e para  $x \in [0, 1]$  de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = \text{sen } 1 \end{cases}$$

(satisfazendo a equação diferencial para  $x \in ]0, 1[$ ). Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x, 0) = 3\text{sen}(2\pi x) - 7\text{sen}(4\pi x) + \text{sen}(x) .$$

13.2 Determine a solução dos seguinte problema de valore inicial e condição na fronteira (PVIF):

$$u_t = u_{xx} - u, \quad x \in (0, L), \quad \text{com} \begin{cases} u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = \cos(3\pi x/L). \end{cases}$$

13.3 Considere a equação de propagação do calor  $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . (\*)

- (a) Mostre que esta equação possui uma solução estacionária (isto é, que não depende do tempo) da forma  $u(x) = Ax + B$ .
- (b) Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos  $x = 0$  e  $x = L$ , em que se fixam as temperaturas  $u(0, t) = T_1$ ,  $u(L, t) = T_2$ .
- (c) Resolva a equação (\*) para  $0 \leq x \leq 1$  e para as condições iniciais e de fronteira
 
$$\begin{cases} u(0, t) = 20 \\ u(1, t) = 60 \\ u(x, 0) = 75. \end{cases}$$

13.4 Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 \\ u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 1 \end{cases}$$

para  $t \geq 0$  e para  $x \in [0, 1]$ , (satisfazendo a equação diferencial para  $x \in ]0, 1[$ ) e onde  $c$  é um parâmetro real.

13.5 Seja  $f$  a função definida no intervalo  $]0, 2\pi[$  por  $f(x) = x$ .

- (a) Determine a série de cosenos da função  $f$ .
- (b) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu, \quad x \in (0, 2\pi) \\ u_x(0, t) = u_x(2\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

13.6 Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = \cos(2\pi x) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = \cos(2\pi y) \end{cases}$$

para  $x, y \in [0, 1]$ .

13.7 Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x, 0, t) = x, \quad u(x, 1, t) = x \\ u(0, y, t) = 0, \quad u(1, y, t) = 1 \\ u(x, y, 0) = x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \cos(2\pi(x - y)) - \cos(2\pi(x + y)) \end{cases}$$

para  $x, y \in [0, 1]$  e  $t \in \mathbb{R}$ .