

1º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA IV  
(LEIC-Tagus, LERCI, LEGI)

2º Semestre 03/04

2 de Abril de 2004, 14.10-15.00

Número: \_\_\_\_\_ Nome: \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_

A cotação de cada uma das 8 alíneas é 2,5 valores.

1. Escreva  $\log(1 + i)$  na forma  $a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , onde  $\log$  designa o ramo principal da função logaritmo.
2. Seja  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$u(x, y) = y^3 - 3x^2y .$$

- (a) Mostre que  $u$  é harmónica.
- (b) Determine uma função  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que a função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

seja holomorfa e satisfaça  $f(0) = i$ .

3. Seja  $g$  a função definida por

$$g(z) = \frac{z}{z^2 + 1} .$$

- (a) Classifique, justificando, as singularidades de  $g$  e calcule os respectivos resíduos.
- (b) Desenvolva  $g$  em série de Laurent na região  $|z| > 1$ .
- (c) Calcule os valores possíveis de

$$\int_{\gamma} g(z) dz ,$$

onde  $\gamma$  é uma curva fechada simples, contida no domínio de  $g$  e percorrida uma vez no sentido positivo.

4. Mostre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \sin \theta} = 2\pi .$$

5. Sejam  $f$  e  $g$  funções inteiras (i.e. holomorfas em todo o  $\mathbb{C}$ ) tais que  $|f(z)| = |g(z)|$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ , e os zeros da função  $g$  são isolados. Mostre que existe uma constante  $\theta \in [0, 2\pi[$  tal que

$$f(z) = e^{i\theta} g(z), \forall z \in \mathbb{C} .$$