Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

3º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA IV - Recuperação
(LEIC-Tagus, LERCI, LEGI)

2º Semestre 03/04 **22 de Junho de 2004, 9.10-10.00**

Número: _________ **Nome:** ______________________________ **Curso:** _________

Cotações: 1 a), b), c) e 2 a) - $3,0$ valores; 2 b) - $4,0$ valores; 2 c) e 3 - $2,0$ valores.

1.(a) Mostre que a transformada de Laplace de

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(2t) & , \ 0 \le t \le \pi \\ \\ 0 & , \ t > \pi \ . \end{cases}$$

é dada por

$$G(s) = \frac{1 - e^{-\pi s}}{s^2 + 4} \ .$$

(b) Determine a função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ cuja transformada de Laplace é

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} \ .$$

(c) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$y''(t) + y(t) = g(t) + \delta(t - 2\pi) \quad \text{e} \quad y(0) = y'(0) = 0 \,,$$

onde g é a função da alínea a).

2.(a) Mostre que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n\pi} \sin(n\pi x) \,, \ \forall x \in]-1, 1[\ .$$

(b) Determine a solução (satisfazendo a equação diferencial para $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$) do seguinte problema de Dirichlet para a equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{com} \quad u(x,0) = u(x,1) = u(0,y) = 0 \quad \text{e} \quad u(1,y) = y \ .$$

(c) Utilizando o resultado da alínea a) num ponto adequado, mostre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \ .$$

3. Seja $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = 0 \,, \ \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Prove que f é constante.