Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

3º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA IV - LEIC-Tagus, LERCI, LEGI

2º Semestre 03/04 **11 de Junho de 2004, 14.10-15.00**

Número: _________ **Nome:** ______________________________ **Curso:** _________

Cotações: 1 a), b), c) e 3 - $3,0$ valores; 2 a) e b) - $4,0$ valores.

1.(a) Mostre que a transformada de Laplace de

$$g(t) = \begin{cases} 2\cos(t) & , \ 0 \leq t \leq \pi/2 \\ 0 & , \ t > \pi/2 \ . \end{cases}$$

é dada por

$$G(s) = 2\left(\frac{s}{s^2+1} + \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}\right) \ .$$

Sugestão: poderá ser útil usar a relação trigonométrica $\cos(t) = \sin(\pi/2 - t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

(b) Determine a função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ cuja transformada de Laplace é

$$F(s) = \frac{2}{(s^2+1)(s^2-1)} \ .$$

(c) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$y''(t) - y(t) = g(t) \quad \text{e} \quad y(0) = y'(0) = 1 \,,$$

onde g é a função da alínea a).

2.(a) Mostre que

$$|x| = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\,\pi^2} \cos\left((2n-1)\pi x\right) \ , \ \forall x \in [-1, 1] \ .$$

(b) Determine a solução (satisfazendo a equação diferencial para $t > 0$ e $0 < x < 1$) do seguinte problema para a equação do calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{com} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = 0 \quad \text{e} \quad u(0, x) = x - \frac{1}{2} \ .$$

3. Seja $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ a transformada de Laplace de $f(t)$, $t \geq 0$. Suponha que $\lim_{t \to 0^+} f(t)/t$ existe e é finito. Prove que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} F(u)du \ .$$

Aproveite este resultado para calcular $\mathcal{L}\{\sin(t)/t\}$.