

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I  
LMAC, MEBIOM, MEFT – 1º SEM. 2010/11

1ª FICHA DE EXERCÍCIOS

0. Desigualdades e Módulos

1. Mostre que:

- 1.1.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x+3} < 2\right\} = ]-\infty, -7[ \cup ]-3, +\infty[$   
1.2.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x+3} \geq 2\right\} = [-7, -3[$   
1.3.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+1}{x-3} \leq 2\right\} = ]-\infty, 3[ \cup [7, +\infty[$   
1.4.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+1}{x-3} > 2\right\} = ]3, 7[$   
1.5.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-2}{x+1} < 3\right\} = ]-\infty, -\frac{5}{2}[ \cup ]-1, +\infty[$   
1.6.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-2}{x+1} \geq 3\right\} = \left[-\frac{5}{2}, -1[$   
1.7.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+2}{x-1} \leq 3\right\} = ]-\infty, 1[ \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty[$   
1.8.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+2}{x-1} > 3\right\} = \left]1, \frac{5}{2}[$   
1.9.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-3}{x+2} < 1\right\} = ]-2, +\infty[$   
1.10.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-3}{x+2} \geq 1\right\} = ]-\infty, -2[$   
1.11.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+3}{x-2} \leq 1\right\} = ]-\infty, 2[$   
1.12.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+3}{x-2} > 1\right\} = ]2, +\infty[$   
1.13.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-2}{x+3} < 2x\right\} = ]-3, -2[ \cup \left]-\frac{1}{2}, +\infty[$   
1.14.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-2}{x+3} \geq 2x\right\} = ]-\infty, -3[ \cup \left[-2, -\frac{1}{2}\right]$   
1.15.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+2}{3-x} > 2x\right\} = \left]-\infty, \frac{1}{2}[ \cup ]2, 3[$   
1.16.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+2}{3-x} \leq 2x\right\} = \left[\frac{1}{2}, 2\right] \cup ]3, +\infty[$   
1.17.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+4}{x-1} < 3x\right\} = \left]-\frac{2}{3}, 1[ \cup ]2, +\infty[$   
1.18.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+4}{x-1} \geq 3x\right\} = \left]-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup ]1, 2]$   
1.19.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{4-x}{x+1} > 3x\right\} = ]-\infty, -2[ \cup \left]-1, \frac{2}{3}[$   
1.20.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{4-x}{x+1} \leq 3x\right\} = [-2, -1[ \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty[$   
1.21.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-7}{x-3} < 3x\right\} = \left]1, \frac{7}{3}[ \cup ]3, +\infty[$   
1.22.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-7}{x-3} \geq 3x\right\} = ]-\infty, 1] \cup \left[\frac{7}{3}, 3[$   
1.23.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+7}{x+3} \leq -3x\right\} = ]-\infty, -3[ \cup \left[-\frac{7}{3}, -1\right]$   
1.24.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+7}{x+3} > -3x\right\} = \left]-3, -\frac{7}{3}[ \cup ]-1, +\infty[$

**2. Mostre que:**

- 2.1.  $\{x \in \mathbb{R} : |x + 2| = 3\} = \{-5, 1\}$   
 2.2.  $\{x \in \mathbb{R} : |x + 2| \leq 1\} = [-3, -1]$   
 2.3.  $\{x \in \mathbb{R} : |3 - x| > 2\} = ]-\infty, 1[ \cup ]5, +\infty[$   
 2.4.  $\{x \in \mathbb{R} : 2 < |x| < 3\} = ]-3, -2[ \cup ]2, 3[$   
 2.5.  $\{x \in \mathbb{R} : 3 < 2|x - 1| \leq 5\} = [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[ \cup ]\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$   
 2.6.  $\{x \in \mathbb{R} : |x - 3| > 2 \wedge x \geq 0\} = [0, 1[ \cup ]5, +\infty[$   
 2.7.  $\{x \in \mathbb{R} : |x + 2| \leq 3 \wedge x + 1 > 0\} = ]-1, 1]$   
 2.8.  $\{x \in \mathbb{R} : |3 - 4x| < 1\} = ]\frac{1}{2}, 1[$   
 2.9.  $\{x \in \mathbb{R} : |4x + 3| > 1\} = ]-\infty, -1[ \cup ]-\frac{1}{2}, +\infty[$   
 2.10.  $\{x \in \mathbb{R} : |5 - 3x| \leq 2\} = [1, \frac{7}{3}]$   
 2.11.  $\{x \in \mathbb{R} : |5 + 3x| \geq 2\} = ]-\infty, -\frac{7}{3}] \cup [-1, +\infty[$   
 2.12.  $\{x \in \mathbb{R} : |4x + 1| > 5\} = ]-\infty, -\frac{3}{2}[ \cup ]1, +\infty[$   
 2.13.  $\{x \in \mathbb{R} : |1 - 4x| < 5\} = ]-1, \frac{3}{2}[$   
 2.14.  $\{x \in \mathbb{R} : |5x + 2| \geq 3\} = ]-\infty, -1] \cup [\frac{1}{5}, +\infty[$   
 2.15.  $\{x \in \mathbb{R} : |2 - 5x| \leq 3\} = [-\frac{1}{5}, 1]$   
 2.16.  $\{x \in \mathbb{R} : |3x - 4| \leq 1\} = [1, \frac{5}{3}]$   
 2.17.  $\{x \in \mathbb{R} : |3x + 4| \geq 1\} = ]-\infty, -\frac{5}{3}] \cup [-1, +\infty[$   
 2.18.  $\{x \in \mathbb{R} : |2x + 3| > 5\} = ]-\infty, -4[ \cup ]1, +\infty[$   
 2.19.  $\{x \in \mathbb{R} : |3 - 2x| < 5\} = ]-1, 4[$   
 2.20.  $\{x \in \mathbb{R} : |2 - 3x| < 1\} = ]\frac{1}{3}, 1[$   
 2.21.  $\{x \in \mathbb{R} : |2 + 3x| > 1\} = ]-\infty, -1[ \cup ]-\frac{1}{3}, +\infty[$   
 2.22.  $\{x \in \mathbb{R} : |5x - 4| \leq 1\} = [\frac{3}{5}, 1]$   
 2.23.  $\{x \in \mathbb{R} : |5x + 4| \geq 1\} = ]-\infty, -1] \cup [-\frac{3}{5}, +\infty[$   
 2.24.  $\{x \in \mathbb{R} : |5 - 2x| < 1\} = ]2, 3[$   
 2.25.  $\{x \in \mathbb{R} : |2x + 5| > 1\} = ]-\infty, -3[ \cup ]-2, +\infty[$   
 2.26.  $\{x \in \mathbb{R} : |5 - 6x| \leq 1\} = [\frac{2}{3}, 1]$   
 2.27.  $\{x \in \mathbb{R} : |6x - 5| > 1\} = ]-\infty, \frac{2}{3}[ \cup ]1, +\infty[$   
 2.28.  $\{x \in \mathbb{R} : |9 - 2x| < 1\} = ]4, 5[$   
 2.29.  $\{x \in \mathbb{R} : |2x - 9| \geq 1\} = ]-\infty, 4] \cup [5, +\infty[$   
 2.30.  $\{x \in \mathbb{R} : |4 - 3x| < 8\} = ]-\frac{4}{3}, 4[$   
 2.31.  $\{x \in \mathbb{R} : |3x - 4| \geq 8\} = ]-\infty, -\frac{4}{3}] \cup [4, +\infty[$   
 2.32.  $\{x \in \mathbb{R} : |3 - 4x| \leq 7\} = [-1, \frac{5}{2}]$   
 2.33.  $\{x \in \mathbb{R} : |4x - 3| > 7\} = ]-\infty, -1[ \cup ]\frac{5}{2}, +\infty[$   
 2.34.  $\{x \in \mathbb{R} : |7 - 2x| \leq 1\} = [3, 4]$   
 2.35.  $\{x \in \mathbb{R} : |2x - 7| > 1\} = ]-\infty, 3[ \cup ]4, +\infty[$   
 2.36.  $\{x \in \mathbb{R} : |5 - 2x| < 9\} = ]-2, 7[$   
 2.37.  $\{x \in \mathbb{R} : |2x - 5| \geq 9\} = ]-\infty, -2] \cup [7, +\infty[$   
 2.38.  $\{x \in \mathbb{R} : |5 - 3x| < 1\} = ]\frac{4}{3}, 2[$   
 2.39.  $\{x \in \mathbb{R} : |3x - 5| \geq 1\} = ]-\infty, \frac{4}{3}] \cup [2, +\infty[$   
 2.40.  $\{x \in \mathbb{R} : 2 < 3|x + 1| \leq 5\} = [-\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}[ \cup ]-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

**3. Mostre que:**

- 3.1.  $\{x \in \mathbb{R} : |3 - 2x| \geq |x + 2|\} = ]-\infty, \frac{1}{3}] \cup [5, +\infty[$
- 3.2.  $\{x \in \mathbb{R} : |x| = |x - 2|\} = \{1\}$
- 3.3.  $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq |x - 2|\} = ]-\infty, 1]$
- 3.4.  $\{x \in \mathbb{R} : |2x - 5| \geq |1 - x|\} = ]-\infty, 2] \cup [4, +\infty[$
- 3.5.  $\{x \in \mathbb{R} : |6x - 5| < |1 - 8x|\} = ]-\infty, -2[ \cup ]\frac{3}{7}, +\infty[$
- 3.6.  $\{x \in \mathbb{R} : |5 - 6x| \geq |8x - 1|\} = [-2, \frac{3}{7}]$
- 3.7.  $\{x \in \mathbb{R} : |2x - 9| < |1 - 8x|\} = ]-\infty, -\frac{4}{3}[ \cup ]1, +\infty[$
- 3.8.  $\{x \in \mathbb{R} : |9 - 2x| \geq |8x - 1|\} = [-\frac{4}{3}, 1]$
- 3.9.  $\{x \in \mathbb{R} : |3x - 4| \leq |8 - 9x|\} = ]-\infty, \frac{2}{3}] \cup [1, +\infty[$
- 3.10.  $\{x \in \mathbb{R} : |4 - 3x| > |9x - 8|\} = ]\frac{2}{3}, 1[$
- 3.11.  $\{x \in \mathbb{R} : |4x - 3| < |7 - 6x|\} = ]-\infty, 1[ \cup ]2, +\infty[$
- 3.12.  $\{x \in \mathbb{R} : |3 - 4x| \geq |6x - 7|\} = [1, 2]$
- 3.13.  $\{x \in \mathbb{R} : |2x - 7| < |1 - 6x|\} = ]-\infty, -\frac{3}{2}[ \cup ]1, +\infty[$
- 3.14.  $\{x \in \mathbb{R} : |7 - 2x| \geq |6x - 1|\} = [-\frac{3}{2}, 1]$
- 3.15.  $\{x \in \mathbb{R} : |2x - 5| \leq |9 - 4x|\} = ]-\infty, 2] \cup [\frac{7}{3}, +\infty[$
- 3.16.  $\{x \in \mathbb{R} : |5 - 2x| > |4x - 9|\} = ]2, \frac{7}{3}[$
- 3.17.  $\{x \in \mathbb{R} : |3x - 5| \leq |1 - 4x|\} = ]-\infty, -4] \cup [\frac{6}{7}, +\infty[$
- 3.18.  $\{x \in \mathbb{R} : |5 - 3x| > |4x - 1|\} = ]-4, \frac{6}{7}[$
- 3.19.  $\{x \in \mathbb{R} : 3|2 - x| \leq |x|\} = [\frac{3}{2}, 3]$
- 3.20.  $\{x \in \mathbb{R} : 3|x - 2| > |x|\} = ]-\infty, \frac{3}{2}[ \cup ]3, +\infty[$
- 3.21.  $\{x \in \mathbb{R} : |4x - 9| \geq |6 - x|\} = ]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$
- 3.22.  $\{x \in \mathbb{R} : |9 - 4x| < |6 - x|\} = ]1, 3[$
- 3.23.  $\{x \in \mathbb{R} : |3x + 4| \leq |x + 8|\} = [-3, 2]$
- 3.24.  $\{x \in \mathbb{R} : |3x + 4| > |x + 8|\} = ]-\infty, -3[ \cup ]2, +\infty[$
- 3.25.  $\{x \in \mathbb{R} : |5x - 2| \geq |x + 2|\} = ]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$
- 3.26.  $\{x \in \mathbb{R} : |2 - 5x| < |x + 2|\} = ]0, 1[$
- 3.27.  $\{x \in \mathbb{R} : |7 - 4x| \leq |2x + 1|\} = [1, 4]$
- 3.28.  $\{x \in \mathbb{R} : |4x - 7| > |2x + 1|\} = ]-\infty, 1[ \cup ]4, +\infty[$
- 3.29.  $\{x \in \mathbb{R} : |5x - 4| \geq |x + 4|\} = ]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$
- 3.30.  $\{x \in \mathbb{R} : |4 - 5x| < |x + 4|\} = ]0, 2[$
- 3.31.  $\{x \in \mathbb{R} : |7 - 2x| \leq |x + 1|\} = [2, 8]$
- 3.32.  $\{x \in \mathbb{R} : |2x - 7| > |x + 1|\} = ]-\infty, 2[ \cup ]8, +\infty[$
- 3.33.  $\{x \in \mathbb{R} : |5 - 2x| < |x - 1|\} = ]2, 4[$
- 3.34.  $\{x \in \mathbb{R} : |2 - x| \geq |3 + 2x|\} = [-5, -\frac{1}{3}]$
- 3.35.  $\{x \in \mathbb{R} : |3 - 5x| < |7x - 6|\} = ]-\infty, \frac{3}{4}[ \cup ]\frac{3}{2}, +\infty[$
- 3.36.  $\{x \in \mathbb{R} : |5x - 3| \geq |6 - 7x|\} = [\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$
- 3.37.  $\{x \in \mathbb{R} : |3x - 2| > |4 - 9x|\} = ]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$
- 3.38.  $\{x \in \mathbb{R} : |2 - 3x| \leq |9x - 4|\} = ]-\infty, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$
- 3.39.  $\{x \in \mathbb{R} : |2x - 5| > |4 - x|\} = ]-\infty, 1[ \cup ]3, +\infty[$
- 3.40.  $\{x \in \mathbb{R} : |5 - 2x| \leq |x - 4|\} = [1, 3]$

4. Mostre que:

- 4.1.  $\{x \in \mathbb{R} : 4 < x^2 < 9\} = ]-3, -2[ \cup ]2, 3[$   
 4.2.  $\{x \in \mathbb{R} : 9 \leq (x-1)^2 < 25\} = ]-4, -2] \cup [4, 6[$   
 4.3.  $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 > 0 \wedge x - 3 \leq 0\} = ]-\infty, -1[ \cup ]1, 3]$   
 4.4.  $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \leq 0 \wedge x + 1 > 0\} = ]-1, 2]$   
 4.5.  $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x - 3 \geq 0\} = ]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$   
 4.6.  $\{x \in \mathbb{R} : 2 - x - x^2 > 0\} = ]-2, 1[$   
 4.7.  $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| \leq 1\} = [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$   
 4.8.  $\{x \in \mathbb{R} : |3 - 2x + x^2| = 5\} = \{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\}$   
 4.9.  $\{x \in \mathbb{R} : |3 - 2x + x^2| < 5\} = ]1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}[$   
 4.10.  $\{x \in \mathbb{R} : |15 + 2x - x^2| \geq 9\} = ]-\infty, -4] \cup [1 - \sqrt{7}, 1 + \sqrt{7}] \cup [6, +\infty[$   
 4.11.  $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 + 2x - 15| < 9\} = ]-6, -1 - \sqrt{7}[ \cup ]-1 + \sqrt{7}, 4[$   
 4.12.  $\{x \in \mathbb{R} : |4x - 3x^2| > 1\} = ]-\infty, \frac{2-\sqrt{7}}{3}[ \cup ]\frac{1}{3}, 1[ \cup ]\frac{2+\sqrt{7}}{3}, +\infty[$   
 4.13.  $\{x \in \mathbb{R} : |3x^2 + 4x| \leq 1\} = \left[-\frac{2-\sqrt{7}}{3}, -1\right] \cup \left[-\frac{1}{3}, \frac{-2+\sqrt{7}}{3}\right]$   
 4.14.  $\{x \in \mathbb{R} : |3x^2 - 5x + 1| \geq 1\} = ]-\infty, 0] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \cup \left[\frac{5}{3}, +\infty\right[$   
 4.15.  $\{x \in \mathbb{R} : |3x^2 + 5x + 1| < 1\} = ]-\frac{5}{3}, -1[ \cup ]-\frac{2}{3}, 0[$   
 4.16.  $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 + 4x - 3| > 2\} = ]-\infty, -5[ \cup ]-2 - \sqrt{5}, -2 + \sqrt{5}[ \cup ]1, +\infty[$   
 4.17.  $\{x \in \mathbb{R} : |3 + 4x - x^2| \leq 2\} = [-1, 2 - \sqrt{5}] \cup [2 + \sqrt{5}, 5]$   
 4.18.  $\{x \in \mathbb{R} : |2x^2 - 5x| \geq 3\} = ]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, \frac{3}{2}] \cup [3, +\infty[$   
 4.19.  $\{x \in \mathbb{R} : |2x^2 + 5x| < 3\} = ]-3, -\frac{3}{2}[ \cup ]-1, \frac{1}{2}[$   
 4.20.  $\{x \in \mathbb{R} : |1 + 4x - 3x^2| > 1\} = ]-\infty, \frac{2-\sqrt{10}}{3}[ \cup ]0, \frac{4}{3}[ \cup ]\frac{2+\sqrt{10}}{3}, +\infty[$   
 4.21.  $\{x \in \mathbb{R} : |3x^2 + 4x - 1| \leq 1\} = \left[-\frac{2-\sqrt{10}}{3}, -\frac{4}{3}\right] \cup \left[0, \frac{-2+\sqrt{10}}{3}\right]$   
 4.22.  $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 + 3x - 2| \geq 2\} = ]-\infty, -4] \cup [-3, 0] \cup [1, +\infty[$   
 4.23.  $\{x \in \mathbb{R} : |2 + 3x - x^2| < 2\} = ]-1, 0[ \cup ]3, 4[$   
 4.24.  $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 5x + 2| \geq 2\} = ]-\infty, 0] \cup [1, 4] \cup [5, +\infty[$   
 4.25.  $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 + 5x + 2| < 2\} = ]-5, -4[ \cup ]-1, 0[$   
 4.26.  $\{x \in \mathbb{R} : |2x^2 - 3x - 1| > 1\} = ]-\infty, -\frac{1}{2}[ \cup ]0, \frac{3}{2}[ \cup ]2, +\infty[$   
 4.27.  $\{x \in \mathbb{R} : |2x^2 + 3x - 1| \leq 1\} = [-2, -\frac{3}{2}] \cup [0, \frac{1}{2}]$   
 4.28.  $\{x \in \mathbb{R} : |2x^2 + 4x - 3| > 3\} = ]-\infty, -3[ \cup ]-2, 0[ \cup ]1, +\infty[$   
 4.29.  $\{x \in \mathbb{R} : |3 + 4x - 2x^2| \leq 3\} = [-1, 0] \cup [2, 3]$   
 4.30.  $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 + 3x - 7| \geq 3\} = ]-\infty, -5] \cup [-4, 1] \cup [2, +\infty[$   
 4.31.  $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 3x - 7| < 3\} = ]-2, -1[ \cup ]4, 5[$   
 4.32.  $\{x \in \mathbb{R} : |4 - x - x^2| \geq 2\} = ]-\infty, -3] \cup [-2, 1] \cup [2, +\infty[$   
 4.33.  $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - x - 4| < 2\} = ]-2, -1[ \cup ]2, 3[$   
 4.34.  $\{x \in \mathbb{R} : |3x^2 + 2x - 3| > 2\} = ]-\infty, -\frac{5}{3}[ \cup ]-1, \frac{1}{3}[ \cup ]1, +\infty[$   
 4.35.  $\{x \in \mathbb{R} : |3 + 2x - 3x^2| \leq 2\} = [-1, -\frac{1}{3}] \cup [1, \frac{5}{3}]$   
 4.36.  $\{x \in \mathbb{R} : |5x^2 + 4x - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\} = ]-\infty, -1[ \cup ]-\frac{4}{5}, 0[ \cup ]\frac{1}{5}, +\infty[$   
 4.37.  $\{x \in \mathbb{R} : |5x^2 - 4x - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}\} = [-\frac{1}{5}, 0] \cup [\frac{4}{5}, 1]$   
 4.38.  $\{x \in \mathbb{R} : |5x^2 + 4x - 5| \geq 4\} = ]-\infty, -\frac{9}{5}] \cup [-1, \frac{1}{5}] \cup [1, +\infty[$   
 4.39.  $\{x \in \mathbb{R} : |5 + 4x - 5x^2| < 4\} = ]-1, -\frac{1}{5}[ \cup ]1, \frac{9}{5}[$

**5. Mostre que:**

- 5.1.  $\{x \in \mathbb{R} : |x(x-3)| = |1-3x|\} = \{-1, 3-2\sqrt{2}, 1, 3+2\sqrt{2}\}$
- 5.2.  $\{x \in \mathbb{R} : |x(x-3)| > |1-3x|\} = ]-\infty, -1[ \cup ]3-2\sqrt{2}, 1[ \cup ]3+2\sqrt{2}, +\infty[$
- 5.3.  $\{x \in \mathbb{R} : |x^2+x| \leq |x+\frac{3}{4}|\} = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
- 5.4.  $\{x \in \mathbb{R} : |x-x^2| \leq |x-\frac{3}{4}|\} = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right]$
- 5.5.  $\{x \in \mathbb{R} : |3x+4| > |x^2+3x|\} = ]-3-\sqrt{5}, -2[ \cup ]-3+\sqrt{5}, 2[$
- 5.6.  $\{x \in \mathbb{R} : |4-3x| > |3x-x^2|\} = ]-2, 3-\sqrt{5}[ \cup ]2, 3+\sqrt{5}[$
- 5.7.  $\{x \in \mathbb{R} : |2x^2-5x| \leq |5x-8|\} = [-2, 1] \cup [2, 4]$
- 5.8.  $\{x \in \mathbb{R} : |2x^2+5x| \leq |5x+8|\} = [-4, -2] \cup [-1, 2]$
- 5.9.  $\{x \in \mathbb{R} : |2x-x^2| < |1-2x|\} = ]-1, 2-\sqrt{3}[ \cup ]1, 2+\sqrt{3}[$
- 5.10.  $\{x \in \mathbb{R} : |x^2+2x| < |2x+1|\} = ]-2-\sqrt{3}, -1[ \cup ]-2+\sqrt{3}, 1[$
- 5.11.  $\{x \in \mathbb{R} : |5x+4| > |4x^2+5x|\} = ]-2, -1[ \cup ]-\frac{1}{2}, 1[$
- 5.12.  $\{x \in \mathbb{R} : |5x-4| > |4x^2-5x|\} = ]-1, \frac{1}{2}[ \cup ]1, 2[$
- 5.13.  $\{x \in \mathbb{R} : |3-2x| \geq |2x-x^2|\} = [-\sqrt{3}, 1] \cup [\sqrt{3}, 3]$
- 5.14.  $\{x \in \mathbb{R} : |2x+3| \geq |x^2+2x|\} = [-3, -\sqrt{3}] \cup [-1, \sqrt{3}]$
- 5.15.  $\{x \in \mathbb{R} : |x^2+3x| \leq |3x+5|\} = [-5, -\sqrt{5}] \cup [-1, \sqrt{5}]$
- 5.16.  $\{x \in \mathbb{R} : |x^2-3x| \leq |3x-5|\} = [-\sqrt{5}, 1] \cup [\sqrt{5}, 5]$
- 5.17.  $\{x \in \mathbb{R} : |2x^2+3x| < |3x+4|\} = ]-2, -\sqrt{2}[ \cup ]-1, \sqrt{2}[$
- 5.18.  $\{x \in \mathbb{R} : |2x^2-3x| < |3x-4|\} = ]-\sqrt{2}, 1[ \cup ]\sqrt{2}, 2[$
- 5.19.  $\{x \in \mathbb{R} : |2x^2+x| > |2x+1|\} = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$
- 5.20.  $\{x \in \mathbb{R} : |x-2x^2| \geq |1-2x|\} = ]-\infty, -1] \cup \{\frac{1}{2}\} \cup [1, +\infty[$
- 5.21.  $\{x \in \mathbb{R} : |3x^2+x| \leq |3x+1|\} = [-1, 1]$
- 5.22.  $\{x \in \mathbb{R} : |x-3x^2| < |1-3x|\} = ]-1, \frac{1}{3}[ \cup ]\frac{1}{3}, 1[$
- 5.23.  $\{x \in \mathbb{R} : |3x^2+4x| \geq |3x+2|\} = ]-\infty, -2] \cup [-1, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, +\infty[$
- 5.24.  $\{x \in \mathbb{R} : |4x-3x^2| > |2-3x|\} = ]-\infty, -\frac{2}{3}[ \cup ]\frac{1}{3}, 1[ \cup ]2, +\infty[$
- 5.25.  $\{x \in \mathbb{R} : 3|x+1| \leq 2|x^2+2x|\} = ]-\infty, -3] \cup [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}] \cup [1, +\infty[$
- 5.26.  $\{x \in \mathbb{R} : 3|1-x| < 2|2x-x^2|\} = ]-\infty, -1[ \cup ]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[ \cup ]3, +\infty[$
- 5.27.  $\{x \in \mathbb{R} : 8|x^2+x| \geq 3|2x+1|\} = ]-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$
- 5.28.  $\{x \in \mathbb{R} : 8|x^2-x| > 3|1-2x|\} = ]-\infty, -\frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[ \cup ]\frac{3}{2}, +\infty[$
- 5.29.  $\{x \in \mathbb{R} : 3|x+6| \leq |x^2+4x|\} = ]-\infty, \frac{-1-\sqrt{73}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{73}}{2}, +\infty[$
- 5.30.  $\{x \in \mathbb{R} : 3|6-x| < |4x-x^2|\} = ]-\infty, \frac{1-\sqrt{73}}{2}[ \cup ]\frac{1+\sqrt{73}}{2}, +\infty[$

## I. Indução Matemática

1. Demonstre por indução as relações seguintes (entre parentesis, cada relação é escrita usando o símbolo de somatório, cf. exercícios do grupo II).

- (a)  $1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ .  
 (  $\sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2$  )
- (b)  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ .  
 (  $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$  )
- (c)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ .  
 (  $\sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$  )
- (d)  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ .  
 (  $\sum_{k=1}^n k^3 = (\sum_{k=1}^n k)^2$  )
- (e)  $0^3 + 1^3 + \dots + (n-1)^3 < n^4/4 < 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ .  
 (  $\sum_{k=1}^n (k-1)^3 < n^4/4 < \sum_{k=1}^n k^3$  )
- (f)  $1/\sqrt{1} + 1/\sqrt{2} + \dots + 1/\sqrt{n} > \sqrt{n}$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq 2$ .  
 (  $\sum_{k=1}^n 1/\sqrt{k} > \sqrt{n}$  )

2. Seja  $P(n)$  a proposição:  $n^2 + 3n + 1$  é par para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

- (a) Mostre que se  $P(k)$  é verdadeira para um dado  $k \in \mathbb{N}$ , então  $P(k+1)$  também é verdadeira.
- (b) Critique a afirmação: “Por indução fica provado que  $P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ”.
- (c) Prove que  $n^2 + 3n + 1$  é ímpar para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Seja  $P(n)$  a proposição:  $1 + 2 + 3 + \dots + n = (2n+1)^2/8$  para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

- (a) Mostre que se  $P(k)$  é verdadeira para um dado  $k \in \mathbb{N}$ , então  $P(k+1)$  também é verdadeira.
- (b) Critique a afirmação: “Por indução fica provado que  $P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}$ ”.
- (c) Modifique  $P(n)$ , mudando a igualdade para uma desigualdade que seja verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

4. Mostre a **desigualdade de Bernoulli**, i.e.  $(1+x)^n \geq 1+nx$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}$  e qualquer  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $x \geq -1$ .

## II. Símbolo de Somatório

Dado  $n \in \mathbb{N}$  e uma sequência de números reais  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , o símbolo de somatório  $\sum_{k=1}^n a_k$  define-se por recorrência da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 \text{ se } n = 1, \quad \sum_{k=1}^n a_k = \left( \sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) + a_n \text{ se } n > 1.$$

Resolva os exercícios seguintes com base nesta definição.

1. Determine os valores numéricos das seguintes somas:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sum_{i=1}^8 (2i - 3); & \text{(b)} \quad & \sum_{k=1}^7 (k - 4)^2; & \text{(c)} \quad & \sum_{j=1}^4 j(j + 1)(j + 2); & \text{(d)} \quad & \sum_{i=1}^4 6; \\ \text{(e)} \quad & \sum_{j=1}^3 j^{2j}; & \text{(f)} \quad & \sum_{k=1}^7 (-1)^k (2k - 3); & \text{(g)} \quad & \sum_{n=1}^5 \frac{1}{n(n + 1)}. \end{aligned}$$

2. Demonstre as seguintes propriedades do somatório:

- (a)  $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$  (propriedade aditiva);
- (b)  $\sum_{k=1}^n (c a_k) = c \sum_{k=1}^n a_k$  para qualquer constante  $c \in \mathbb{R}$  (homogeneidade);
- (c)  $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$  (propriedade telescópica).

3. Utilizando os resultados do Exercício I.1 e as propriedades anteriores do somatório, calcule:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sum_{k=1}^{18} (k + 1); & \text{(b)} \quad & \sum_{k=1}^{20} (2k - 1)^2; & \text{(c)} \quad & \sum_{k=1}^{15} (k - 3)^3; \\ \text{(d)} \quad & \sum_{k=1}^{20} \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right); & \text{(e)} \quad & \sum_{k=1}^{20} (3^k - 3^{k+2}). \end{aligned}$$

4. Mostre que para qualquer  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

pelos seguintes dois métodos distintos:

- (a) usando indução.
- (b) observando que  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$  e usando as propriedades do Exercício 2.

5. Mostre que para qualquer  $n \in \mathbb{N}$  e quaisquer números reais  $a, b \in \mathbb{R}$  é válida a igualdade

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=1}^n a^{n-k} b^{k-1}.$$

6. Mostre que para quaisquer  $n \in \mathbb{N}$  e  $r \in \mathbb{R}$  com  $r \neq 1$

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

pelos seguintes dois métodos distintos:

(a) usando indução.

(b) aplicando as propriedades do Exercício 2 a  $(1 - r) \sum_{k=0}^n r^k$ .

A que é igual a soma quando  $r = 1$ ?

Nota: por definição,  $r^0 = 1$ .

7. O símbolo  $n!$ , designado por  **$n$ -factorial**, define-se por recorrência da seguinte forma:

$$0! = 1 \quad \text{e} \quad n! = n \cdot (n - 1)!, \quad \text{para qualquer } n \in \mathbb{N}.$$

Observe que  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ . Dados inteiros  $0 \leq k \leq n$ , o **coeficiente binomial**  $\binom{n}{k}$  (às vezes também representado por  $C_k^n$ ) é definido por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

- (a) Mostre que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n - k} \quad \text{e} \quad \binom{n + 1}{k} = \binom{n}{k - 1} + \binom{n}{k}.$$

Esta última fórmula é a chamada **lei do triângulo de Pascal**, permitindo o cálculo rápido dos sucessivos coeficientes binomiais.

- (b) Prove por indução a **fórmula do desenvolvimento do binómio de Newton**:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad \text{para quaisquer } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}_0.$$

- (c) Use a fórmula anterior para estabelecer as igualdades

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0, \quad \text{para qualquer } n \in \mathbb{N}_0.$$

8. Usando a desigualdade triangular ( $|x + y| \leq |x| + |y|$ ) e o método de indução, mostre que para todo o  $n \in \mathbb{N}$  e quaisquer números reais  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  é válida a desigualdade

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|.$$

### III. Indução e Somatórios

Use indução para mostrar que, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ :

1.

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} .$$

2.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1} .$$

3.

$$\sum_{k=1}^n k(3k-1) = n^2(n+1) .$$

4.

$$\sum_{k=1}^n k(3k+1) = n(n+1)^2 .$$

5.

$$\sum_{k=1}^n (k-1)(k+2) = \frac{(n-1)n(n+4)}{3} .$$

6.

$$\sum_{k=1}^n (k-1)(3k+2) = (n-1)n(n+2) .$$

7.

$$\sum_{k=1}^n (k+1)2^k = n2^{n+1} .$$

8.

$$\sum_{k=1}^n (k+1)2^{k-1} = n2^n .$$

9.

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} .$$

10.

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{k+1}} = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}} .$$

11.

$$\sum_{k=1}^n k(k+3) = \frac{n(n+1)(n+5)}{3} .$$

12.

$$\sum_{k=1}^n k(3k+5) = n(n+1)(n+3) .$$

13.

$$\sum_{k=1}^n (2k+1)3^k = n3^{n+1} .$$

14.

$$\sum_{k=1}^n (2k+1)3^{k-1} = n3^n .$$

15.

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} .$$

16.

$$\sum_{k=1}^n \frac{5-2k}{3^k} = 1 + \frac{n-1}{3^n} .$$

17.

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{3^k} = 1 - \frac{n+1}{3^n} .$$

18.

$$\sum_{k=1}^n k(k+2)2^k = (n^2+1)2^{n+1} - 2 .$$

19.

$$\sum_{k=1}^n k(k+2)2^{k-1} = (n^2+1)2^n - 1 .$$

20.

$$\sum_{k=1}^n \frac{(k-2)^2}{2^k} = 2 - \frac{n^2+2}{2^n} .$$

21.

$$\sum_{k=1}^n \frac{(k-3)^2}{2^k} = 3 - \frac{(n-1)^2+2}{2^n} .$$

22.

$$\sum_{k=1}^n \frac{(k-2)3^{k-1}}{(k+1)!} = 1 - \frac{3^n}{(n+1)!} .$$

23.

$$\sum_{k=1}^n \frac{(k-3)3^{k-1}}{k!} = 1 - \frac{3^n}{n!} .$$

#### IV. Funções Elementares

- 1) Esboce os gráficos dos polinómios  $f(x) = x$  e  $g(x) = x^3$ , assinalando de forma conveniente os seus três pontos de intersecção.
- 2) Esboce os gráficos dos polinómios  $f(x) = x^2 - 2$  e  $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$ , assinalando de forma conveniente os seus dois pontos de intersecção.
- 3) Seja  $f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$  um polinómio de grau  $n \in \mathbb{N}$ . Prove cada uma das seguintes proposições.
  - (a) Se  $n \geq 1$  e  $f(0) = 0$ , então  $f(x) = xg(x)$  com  $g$  um polinómio de grau  $n - 1$ .
  - (b) Para cada  $a \in \mathbb{R}$ , a função  $p$  dada por  $p(x) = f(x + a)$  é também um polinómio de grau  $n$ .
  - (c) Se  $n \geq 1$  e  $f(a) = 0$  para um dado  $a \in \mathbb{R}$ , então  $f(x) = (x - a)h(x)$  com  $h$  um polinómio de grau  $n - 1$ . [Sugestão: considere  $p(x) = f(x + a)$ .]
  - (d) Se  $f(x) = 0$  para  $(n + 1)$  valores distintos de  $x \in \mathbb{R}$ , então  $c_k = 0$ ,  $k = 0, \dots, n$ , e portanto  $f(x) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
  - (e) Seja  $g(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$  um polinómio de grau  $m \in \mathbb{N}$ , com  $m \geq n$ . Se  $g(x) = f(x)$  para  $(m + 1)$  valores distintos de  $x \in \mathbb{R}$ , então  $m = n$ ,  $b_k = c_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ , e portanto  $g(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- 4) Em cada caso, determine todos os polinómios  $p$  de grau  $\leq 2$  satisfazendo as condições dadas.

$$\begin{array}{ll} \text{(a) } p(0) = p(1) = p(2) = 1 & \text{(c) } p(0) = p(1) = 1 \\ \text{(b) } p(0) = p(1) = 1, p(2) = 2 & \text{(d) } p(0) = p(1) \end{array}$$

- 5) Em cada caso, determine todos os polinómios  $p$  de grau  $\leq 2$  satisfazendo as condições dadas para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\text{(a) } p(x) = p(1-x) \quad \text{(b) } p(x) = p(1+x) \quad \text{(c) } p(2x) = 2p(x) \quad \text{(d) } p(3x) = p(x+3)$$

- 6) Considere as seguintes propriedades fundamentais das funções **seno**,  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , e **coseno**,  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

1.  $\cos(0) = \sin(\pi/2) = 1$  e  $\cos(\pi) = -1$ .
2. Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$  tem-se que

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y) .$$

3. Para  $0 < x < \pi/2$  tem-se que

$$0 < \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)} .$$

Prove a partir delas as seguintes propriedades importantes das funções seno e coseno. [Sugestão: Apostol, Vol. I, §2.5.]

- (a)  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- (b)  $\sin(0) = \cos(\pi/2) = \sin(\pi) = 0$ .
- (c)  $\sin(-x) = -\sin(x)$  e  $\cos(-x) = \cos(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  (i.e. o seno é uma função ímpar e o coseno uma função par).
- (d)  $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$  e  $\cos(x + \pi/2) = -\sin(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

(e)  $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$  e  $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  (i.e. o seno e o cosseno são funções periódicas).

(f) Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$  tem-se que

$$\begin{aligned}\cos(x + y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \\ \sin(x + y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).\end{aligned}$$

(g) Para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$  tem-se que

$$\begin{aligned}\sin(a) - \sin(b) &= 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right), \\ \cos(a) - \cos(b) &= -2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\end{aligned}$$

(h) No intervalo  $[0, \pi/2]$ , o seno é estritamente crescente e o cosseno é estritamente decrescente.

7) Com base nas propriedades das funções seno e cosseno listadas no exercício anterior, mostre que:

(a)  $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$  com  $k \in \mathbb{Z}$ .

(b)  $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \pi/2$  com  $k \in \mathbb{Z}$ .

(c)  $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$  e  $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

(d)  $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$  e  $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

(e)  $2\cos(x)\cos(y) = \cos(x-y) + \cos(x+y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .

(f)  $2\sin(x)\sin(y) = \cos(x-y) - \cos(x+y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .

(g)  $2\sin(x)\cos(y) = \sin(x-y) + \sin(x+y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .

(h) Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $h \neq 0$  tem-se que

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \frac{\sin(h/2)}{h/2} \cos(x+h/2), \\ \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= -\frac{\sin(h/2)}{h/2} \sin(x+h/2).\end{aligned}$$

8) Considere as funções **seno hiperbólico**,  $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , e **cosseno hiperbólico**,  $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Mostre que:

(a)  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

(b)  $\sinh(0) = 0$  e  $\cosh(0) = 1$ .

(c)  $\sinh(-x) = -\sinh(x)$  e  $\cosh(-x) = \cosh(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

(d) para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$  tem-se que

$$\begin{aligned}\cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y), \\ \sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y).\end{aligned}$$

(e)  $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$  e  $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

(f)  $\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$  e  $\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

9) Determine o domínio das funções definidas pelas seguintes expressões.

(a)  $f(x) = \tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$       (b)  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$       (c)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$   
 (d)  $f(x) = \log(\log x)$       (e)  $f(x) = \log(1+x^{3/2})$       (f)  $f(x) = \log(1-x^{2/3})$   
 (g)  $f(x) = \log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$       (h)  $f(x) = \log(1+\sqrt{x+1})$

**V. Limites Elementares**

1) Calcule os seguintes limites.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$       (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-3x+1}{x-1}$       (c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$       (e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$       (f)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}$   
 (g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

2) Usando o caso notável

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 ,$$

mostre que:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = 2$       (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin x} = 5$       (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{x} = 2$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \cos a$       (e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{\sin x} = 2$       (f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

3) Calcule os seguintes limites.

(a)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan t)}{\sin(t)}$       (b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x}$       (c)  $\lim_{t \rightarrow \pi} \frac{\sin(t - \pi)}{t - \pi}$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}$       (e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$       (f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2}$

4) Seja  $D = [0, +\infty[\setminus\{1\}$  e considere a função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} \quad \text{para} \quad x \in D .$$

Calcule

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) , \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) .$$

5) Calcule os limites quando  $x \rightarrow 0^+$ ,  $x \rightarrow 0^-$ ,  $x \rightarrow +\infty$  e  $x \rightarrow -\infty$  das seguintes funções definidas em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

(a)  $e^{1/x}$       (b)  $\sinh(1/x)$       (c)  $\cosh(1/x)$   
 (d)  $e^{1/x^2}$       (e)  $\sinh(1/x^2)$       (f)  $\cosh(1/x^2)$

6) Calcule os limites quando  $x \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow +\infty$  e  $x \rightarrow -\infty$  das funções definidas pelas seguintes expressões.

$$\begin{array}{llll}
 \text{(a)} \frac{\sin(3x)}{x} & \text{(b)} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{(c)} \cos\left(\frac{2x+\pi}{x^2+1}\right) & \text{(d)} \cos\left(\frac{2x-\pi}{x^2+1}\right) \\
 \text{(e)} \sin\left(\frac{x-\pi}{x^2+2}\right) & \text{(f)} \cos\left(\frac{x+\pi}{x^2+2}\right) & \text{(g)} \cos\left(\frac{x+\pi}{x^2+2}\right) & \text{(h)} \cos\left(\frac{x-\pi}{x^2+2}\right) \\
 \text{(i)} \sin\left(\frac{x+\pi}{x^2+4}\right) & \text{(j)} \sin\left(\frac{x-\pi}{x^2+4}\right) & \text{(k)} \sin\left(\frac{\pi x}{2x-1}\right) & \text{(l)} \cos\left(\frac{\pi x}{x+1}\right) \\
 \text{(m)} \sin\left(\frac{\pi x}{\sqrt{4x^2+1}}\right) & \text{(n)} \cos\left(\frac{\pi x}{\sqrt{4x^2+1}}\right) & & 
 \end{array}$$

7) Calcule os limites quando  $x \rightarrow 0^+$  e  $x \rightarrow +\infty$  das funções definidas pelas seguintes expressões.

$$\begin{array}{llll}
 \text{(a)} \log\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) & \text{(b)} \log\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right) & \text{(c)} \log\left(\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right) & \text{(d)} \log\left(\frac{x}{1+\sqrt{x}}\right) \\
 \text{(e)} \log\left(\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\right) & \text{(f)} \log\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1+x}\right) & \text{(g)} \log\left(\frac{1}{1+x^2}\right) & \text{(h)} \log\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \\
 \text{(i)} \log\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) & \text{(j)} \log\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) & \text{(k)} \log\left(\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right) & \text{(l)} \log\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}\right)
 \end{array}$$

8) Calcule os limites quando  $x \rightarrow 0^+$  e  $x \rightarrow +\infty$  das funções definidas pelas seguintes expressões.

$$\begin{array}{llllll}
 \text{(a)} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} & \text{(b)} e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} & \text{(c)} e^{\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} & \text{(d)} e^{\frac{1-x}{\sqrt{x}}} & \text{(e)} e^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}} & \text{(f)} e^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} \\
 \text{(g)} e^{\frac{1-x^2}{x}} & \text{(h)} e^{\frac{x^2}{1+x}} & \text{(i)} e^{\frac{x^2}{1+x^2}} & \text{(j)} e^{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} & \text{(k)} e^{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}} & \text{(l)} e^{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}
 \end{array}$$