Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LMAC, MEBIOM, MEFT – 1º SEM. 2010/11

2ª FICHA DE EXERCÍCIOS - PARTE 2

I. Representação gráfica de funções.

1) Nas alíneas seguintes, cada função está definida em todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ para os quais a fórmula dada para $f(x)$ faz sentido. Em cada caso, determine intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas de f, e esboce o seu gráfico.

(a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$ (c) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$ (e) $f(x) = \dfrac{|x|}{1-|x|}$ (f) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(g) $f(x) = xe^{1/x}$ (h) $f(x) = \dfrac{x}{1+\log x}$

2) Considere a função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, <u>contínua no ponto 0</u> e tal que

$$f(x) = \sqrt{x}\,\log(x),\ x > 0\,.$$

(a) Calcule $f(0)$.
(b) Obtenha equações para as tangentes ao gráfico de f nos pontos com abcissa $x = 0$ e $x = 1$.
(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.
(d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

3) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |x|e^{-x^2/2},\ x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
(b) Determine (justificando) os pontos $x \in \mathbb{R}$ onde f é diferenciável e calcule a sua derivada.
(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.
(d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

4) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \log x & ,\ x > 0 \\ \dfrac{x^2}{1-x} & ,\ x \le 0\,. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$.
(b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.
(c) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

5) Considere a função $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{2} + \log(x+1) - \log(x-1)\,,\ \forall\, x > 1\ .$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de f.
(b) Determine as concavidades e inflexões de f.
(c) Determine as assímptotas ao gráfico de f.
(d) Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.

6) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^x}{x}\,,\ \forall\, x \neq 0\ .$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de f.
(b) Determine as concavidades e inflexões de f.
(c) Determine as assímptotas ao gráfico de f.
(d) Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.

7) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^{x+1}}{x+2}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}\ .$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de f.
(b) Determine as concavidades e inflexões de f.
(c) Determine as assímptotas ao gráfico de f.
(d) Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.

II. Funções Trigonométricas e Hiperbólicas Inversas.

1) Considere a função inversa da função seno hiperbólico, $\operatorname{argsenh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mostre que

$$\operatorname{argsenh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad \text{e que} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{argsenh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\ .$$

2) Considere a função inversa da função coseno hiperbólico, quando esta última é restrita ao intervalo $[0, +\infty[$, $\operatorname{argcosh} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$. Mostre que

$$\operatorname{argcosh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\ ,\ \forall x \in [1, +\infty[\ ,$$

e que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{argcosh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,,\ \forall x \in]1, +\infty[\ .$$

3) Determine o domínio das funções definidas pelas seguintes expressões.

(a) $f(x) = \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{2}$ (b) $f(x) = \operatorname{arcsen} e^x$ (c) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}\right)$

(d) $f(x) = \arccos\dfrac{1}{x}$ (e) $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ (f) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

(g) $f(x) = \log\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ (h) $f(x) = \log(1 - \arctan x)$

4) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & , \ x < 0 \\ 1 + e^{1-x} & , \ x \geq 0 \ . \end{cases}$$

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
(b) Calcule os limites laterais de f no ponto 0.

5) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & , \ x > 0 \\ \dfrac{1}{x^2+1} & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.
(a) Estude a função f no que respeita à continuidade no seu domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
(c) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.
(d) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

6) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x) = \operatorname{arcsen}(x/2)$ (b) $f(x) = \arccos(1/x)$ (c) $f(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$

(d) $f(x) = \arctan\left(\sqrt{x}\right)$ (e) $f(x) = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ (f) $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

(g) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (h) $f(x) = \log\left(\arccos\left(1/\sqrt{x}\right)\right)$ (i) $f(x) = e^{\arctan(x)}$

7) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a + bx & , \ x \leq 0 \\ \arctan(1/x) & , \ x > 0 \ , \end{cases}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ fixos.
(a) Mostre que f é diferenciável no ponto 1 e escreva uma equação da tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.
(b) Sabendo que f é diferenciável no ponto 0, determine os valores de a e b.
(c) Defina f' e diga se a função f é de classe $C^1(\mathbb{R})$.

8) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x^2)}{x}, & \text{se } x < 0; \\ \\ \operatorname{sen}(x), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

9) Considere a função $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(e^{x^2} - 1)}{x}, & \text{se } x > 0; \\ \\ \operatorname{arcsen}(x), & \text{se } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $]-1, +\infty[\setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

10) Considere a função $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\log(1 + x^2))}{x}, & \text{se } x > 0; \\ \\ \operatorname{arcsen}(x), & \text{se } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $]-1, +\infty[\setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

11) Considere a função $f :]-\infty, 2\pi[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \log(1 - \cos(x)), & \text{se } 0 < x < 2\pi; \\ \\ \arctan(x^2), & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $]-\infty, 2\pi[\setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 0$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

12) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1 + \operatorname{sen}^2(x))}{x}, & \text{se } x < 0; \\ \\ \arctan(x), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.

(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

13) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\operatorname{sen}(x^2)} - 1}{x}, & \text{se } x > 0; \\[2ex] \arctan(x), & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

14) Considere a função $f : [-2, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1-\cos(x)} - 1}{x}, & \text{se } x > 0; \\[2ex] \operatorname{arcsen}(x/2), & \text{se } -2 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $]-2, +\infty[\setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1/2$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

15) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\log(1 + x^2))}{x}, & \text{se } x < 0; \\[2ex] \arctan(x), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

16) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1-\cos(x)} - 1}{x}, & \text{se } x < 0; \\[2ex] \arctan(x/2), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1/2$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

17) Considere a função $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1 + \operatorname{sen}^2(x))}{x}, & \text{se } x > 0; \\[2ex] \operatorname{arcsen}(x), & \text{se } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $]-1, +\infty[\setminus \{0\}$.

(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.

(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

18) Considere a função $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\operatorname{sen}(x^2)} - 1}{x}, & \text{se } x > 0; \\ \\ \operatorname{arcsen}(x), & \text{se } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $]-1, +\infty[\setminus \{0\}$.

(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.

(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

19) Considere a função $f :]-\infty, 2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(e^x - 1)}{x}, & \text{se } x < 0; \\ \\ \operatorname{arcsen}(x/2), & \text{se } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $]-\infty, 2[\setminus \{0\}$.

(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1/2$.

(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

20) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(2x) - 2\operatorname{arcsen}(x)}{x^3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x \operatorname{arcsen}(1/x)$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{arcsen}(1/x)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{\arctan(1/x)}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan(x)\right)^{1/x}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)^{1/x}$

21) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x + 2\arctan\frac{1}{x}, \ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} .$$

Esboce o seu gráfico e indique o seu contradomínio.

22) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{1+x}{|x|}\right) & , x \neq 0 \\ \\ \dfrac{\pi}{2} & , x = 0 . \end{cases}$$

(a) Estude f quanto à continuidade em todo o seu domínio, e quanto à existência de limites quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

(b) Determine (justificando) os pontos $x \in \mathbb{R}$ onde f é diferenciável e calcule a sua derivada.

(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.

(d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

23) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua no ponto 0 e tal que

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right), \ x \neq 0 .$$

(a) Calcule $f(0)$ e estude f quanto à existência de limites quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

(b) Obtenha equações para as tangentes ao gráfico de f nos pontos com abcissa $x = 0$ e $x = 1$.

(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.

(d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

24) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x^2) & , \ x \geq 0 \\ x e^{1/x} & , \ x < 0 . \end{cases}$$

(a) Mostre que f é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$.

(b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.

(c) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

25) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{1+x}\right) & , x \geq 0 \\ x^2 e^x & , x < 0 . \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua mas não diferenciável no ponto zero.

(b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.

(c) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

26) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2\arctan(x) - x , \ \forall x \in \mathbb{R} .$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de f.

(b) Determine as concavidades e inflexões de f.

(c) Determine as assímptotas ao gráfico de f.

(d) Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.