

**AULAS TEÓRICAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I**  
**1º SEMESTRE 2010/11 – LMAC, MEBIOM, MEFT**

MIGUEL ABREU E RUI LOJA FERNANDES

1. AULA – 20 DE SETEMBRO DE 2010

**Apresentação.** Miguel Abreu (responsável) <mabreu@math.ist.utl.pt>

**Outros docentes.** António Serra e Helena Mascarenhas.

**Página da cadeira.** <http://www.math.ist.utl.pt/~mabreu/CI>

Contém toda a informação relevante. Deve ser consultada regularmente.

**Programa.**

- Números reais (propriedades algébricas, relação de ordem e propriedade do supremo). Números naturais. Método de indução.
- Funções reais de variável real: limite e continuidade; diferenciabilidade - teoremas fundamentais; Regra de Cauchy e levantamento de indeterminações; Fórmula de Taylor.
- Primitivação. Cálculo integral em  $\mathbb{R}$ : integral de Riemann; integrabilidade de funções seccionalmente contínuas; teorema fundamental do cálculo; fórmulas de integração por partes e por substituição.
- Funções transcendentais elementares: logaritmo, exponencial e funções hiperbólicas.
- Sucessões e séries numéricas: convergência; sucessões e séries geométricas; critérios de comparação; séries absolutamente convergentes; séries de potências; séries de Taylor.

**Bibliografia.**

- M. Spivak, *Calculus, 3rd Edition*, Cambridge University Press, 2006.
- M. Abreu, R. L. Fernandes e M. Ricou, *Folhas de Cálculo Diferencial e Integral I*, 2009.
- W. Trench, *Introduction to Real Analysis*, Trinity University, free edition, 2009.
- J. Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*, Gulbenkian, 8ª edição, 2005.
- *Exercícios de Análise Matemática I e II* - Departamento de Matemática, IST Press, 2005.
- *Fichas de Exercícios*, Miguel Abreu, DMIST, 2006.

**Horário de Dúvidas.** Todas as sessões de esclarecimento de dúvidas têm lugar na sala de dúvidas do Departamento de Matemática (piso 02 do Pavilhão de Matemática). Os horários de dúvidas serão afixados na página da cadeira.

**Avaliação de Conhecimentos. Testes** - terão lugar nos dias **13 de Novembro (1º-Teste)** e **15 de Janeiro (2º-Teste)**, com a duração de 90 minutos cada. A classificação final será o resultado da média aritmética das classificações dos dois Testes.

**Exame de Recurso** - terá lugar no dia **5 de Fevereiro**, com a duração de 180 minutos. A este Exame podem comparecer todos os alunos que não tenham tido aprovação na disciplina ou que pretendam melhorar a classificação obtida nos Testes. Nesta data os alunos podem também optar por tentar melhorar a classificação de um dos Testes.

**Avaliação Contínua Facultativa** - esta componente de avaliação consiste na realização de quatro Fichas de Avaliação com a duração de 25 minutos cada. A resolução destas fichas terá lugar no final de cada aula prática das 4ª (11 – 15 de Outubro), 7ª (1 – 5 de Novembro, 12ª

(6 – 10 de Dezembro) e 14<sup>a</sup> (3 – 7 de Janeiro) semanas efectivas de aulas. A matéria avaliada em cada uma das Fichas de Avaliação será a da Ficha de Exercícios correspondente.

A classificação das Fichas de Avaliação só influenciará a classificação final caso melhore a classificação obtida nos Testes/Exame, de acordo com a seguinte tabela:

Classificação Mínima nas Fichas	Média Testes/Exame	Classificação Final
CCCD	9.0 – 9.4	10
CCCC	8.5 – 8.9	10
BBCC	8.0 – 8.4	10
BCC	10.0 – 10.4	11
ABCC ou BBBC	11.0 – 11.4	12
AACC, BBBB ou ABBC	12.0 – 12.4	13
ABBB ou AABC	13.0 – 13.4	14
AABB ou AAAC	14.0 – 14.4	15
AAAB	15.0 – 15.4	16
AAAA	16.0 – 16.4	17

Nota: A = Muito Bom; B = Bom; C = Satisfaz; D = Não Satisfaz.

As classificações superiores a 16 valores nos Testes/Exame não serão influenciadas pela classificação das Fichas de Problemas.

**Classificações Superiores a 17** - um aluno com classificação final superior a 17 será convocado para se apresentar a exame oral. A não realização deste exame oral limita a classificação máxima a 17 valores.

### Observações

**Teste de Aferição** - No dia 23 de Setembro realiza-se uma prova de aferição obrigatória, para testar os conhecimentos adquiridos no Ensino Secundário. Nesse dia não haverá aulas para os alunos do primeiro ano. A classificação deste teste poderá dar origem a uma bonificação na classificação do 1<sup>o</sup>-Teste: sendo  $N$  o número de perguntas na prova de aferição e  $X$  o número de respostas correctas, o impacto varia de 0.0 quando  $X \leq N/2$  até 1.0 quando  $X = N$ , seguindo uma regra de três óbvia.

**Identificação Pessoal** - os alunos(as) só podem apresentar-se a provas de avaliação munidos de **Bilhete de Identidade ou cartão de aluno(a) do IST.**

**Calculadoras** - Não é permitida a utilização de qualquer género de calculadoras.

**Importante.** Esqueçam máquinas de calcular. Consultem os *Módulos de Apoio à Formação Básica em Matemática* disponíveis em <http://modulos.math.ist.utl.pt/>

**Propriedades Básicas dos Números Reais.** Recordemos primeiro as chamadas Propriedades Algébricas do conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ , i.e. aquelas que se referem às operações fundamentais de adição e multiplicação.

**Propriedade 1.** (comutatividade de  $+$  e  $\cdot$ )

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a + b = b + a \quad e \quad a \cdot b = b \cdot a .$$

**Propriedade 2.** (associatividade de  $+$  e  $\cdot$ )

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a + (b + c) = (a + b) + c \quad e \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c .$$

**Propriedade 3.** (distributividade)

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c .$$

**Propriedade 4.** (elementos neutros)

$$\exists^1 0 \in \mathbb{R} : a + 0 = 0 + a = a \text{ para qualquer } a \in \mathbb{R}.$$

$$\exists^1 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \text{ para qualquer } a \in \mathbb{R}.$$

**Propriedade 5.** (simétricos e inversos)

$\forall a \in \mathbb{R} \exists^1 (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$ . O número  $(-a)$  é designado por simétrico de  $a$ .

$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists^1 a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$ . O número  $a^{-1}$  é designado por inverso de  $a$ .

**Exemplo 1.1.** O conjunto  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  dos números naturais satisfaz as Propriedades 1-3. O conjunto  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  também satisfaz a Propriedade 4. O conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais satisfaz todas estas 5 propriedades. Voltaremos com mais detalhe a estes conjuntos bem vossos conhecidos.

**Nota 1.2.** Quaisquer outras propriedades algébricas dos números reais podem de facto ser deduzidas a partir destas cinco primeiras, usando as regras básicas da lógica matemática. Por outro lado, estas propriedades não podem ser deduzidas a partir de outras mais elementares. Por esta razão, chamamos a estas propriedades básicas de *axiomas algébricos* ou *axiomas do corpo* dos números reais. As outras propriedades que se deduzem a partir destas podem ser designadas de *teoremas* ou *proposições*.

## 2. AULA – 21 DE SETEMBRO DE 2010

Vamos continuar a recordar algumas propriedades algébricas dos números reais. Todas as propriedades algébricas que se seguem podem ser deduzidas a partir dos *axiomas algébricos* ou *axiomas do corpo* enunciados na última aula.

**Propriedade 6.** (Lei do Corte para a Adição) *Para quaisquer  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , se  $a + b = a + c$  então  $b = c$ . (I.e.  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a + b = a + c \Rightarrow b = c$ .)*

*Demonstração.* Usando as cinco propriedades acima, podemos mostrar a Lei do Corte para a Adição da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a + b &= a + c && \text{(hipótese inicial)} \\ \Rightarrow (-a) + (a + b) &= (-a) + (a + c) && \text{(Propriedade 5 determina } (-a)) \\ \Rightarrow ((-a) + a) + b &= ((-a) + a) + c && \text{(Propriedade 2 - associatividade)} \\ \Rightarrow 0 + b &= 0 + c && \text{(Propriedade 5 - propriedade do simétrico)} \\ \Rightarrow b &= c && \text{(Propriedade 4 - 0 é neutro para +)} \end{aligned}$$

□

**Propriedade 7.** (Lei do Corte para a Multiplicação)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a \neq 0 \text{ e } a \cdot b = a \cdot c) \Rightarrow b = c$ .

**Propriedade 8.** (Zero é Elemento Absorvente da Multiplicação) *Para qualquer  $a \in \mathbb{R}$  tem-se que*

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0.$$

**Propriedade 9.** (Subtração)

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \exists^1 x \in \mathbb{R} : a + x = b.$$

*Este número  $x = b + (-a)$  é designado por diferença entre  $b$  e  $a$  e representa-se por  $b - a$ .*

**Propriedade 10.** (Divisão)

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ com } a \neq 0, \exists^1 x \in \mathbb{R} : a \cdot x = b.$$

*Este número  $x = b \cdot a^{-1}$  é designado por quociente de  $b$  por  $a$  e representa-se por  $b/a$ .*

**Propriedade 11.** *Para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$ , se  $a \cdot b = 0$  então  $a = 0$  ou  $b = 0$ , i.e. em  $\mathbb{R}$  não existem divisores de zero.*

**Propriedade 12.** (Regras de Sinais) *Para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$  tem-se que*

$$-(-a) = a, \quad -(a + b) = -a - b, \quad -(a \cdot b) = (-a) \cdot b, \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

e, se  $b \neq 0$ ,

$$-(a/b) = (-a)/b = a/(-b).$$

**Propriedades de Ordem.** Recordemos as chamadas Propriedades de Ordem do conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ , i.e. aquelas que se referem ao subconjunto  $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$  formado pelos *números positivos* ou, de forma equivalente, ao subconjunto  $\mathbb{R}^- \subset \mathbb{R}$  formado pelos *números negativos*:

$$a \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow (-a) \in \mathbb{R}^+.$$

**Propriedade 13.** ( $\mathbb{R}^+$  é fechado para  $+$  e  $\cdot$ )

$$a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}^+ \quad e \quad (a \cdot b) \in \mathbb{R}^+.$$

**Propriedade 14.** (tricotomia)

*Qualquer número real  $a \in \mathbb{R}$  verifica uma e uma só das seguintes três condições:*

$$a \in \mathbb{R}^+ \quad \text{ou} \quad a = 0 \quad \text{ou} \quad (-a) \in \mathbb{R}^+.$$

**Nota 2.1.** A Propriedade 14 da tricotomia pode também ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \sqcup \{0\} \sqcup \mathbb{R}^+,$$

onde o símbolo  $\sqcup$  significa “união disjunta”.

**Nota 2.2.** Quaisquer outras propriedades de ordem dos números reais podem de facto ser deduzidas a partir destas duas primeiras. Por essa razão, chamamos a estas duas propriedades de *axiomas de ordem* dos números reais.

**Definição 2.3.** (Relações de Ordem)

Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ . Diremos que  *$a$  é menor que  $b$*  ou que  *$b$  é maior que  $a$* , escrevendo  $a < b$  ou  $b > a$ , quando  $(b - a) \in \mathbb{R}^+$ . Diremos também que  *$a$  é menor ou igual a  $b$*  ou que  *$b$  é maior ou igual a  $a$* , escrevendo  $a \leq b$  ou  $b \geq a$ , quando  $(b - a) \in \mathbb{R}^+$  ou  $b = a$ .

**Nota 2.4.** As seguintes equivalências são consequências simples da Definição 2.3:

$$a > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+ \quad e \quad a < 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^-.$$

A Propriedade 13 pode assim ser escrita na forma

$$a, b > 0 \Rightarrow a + b > 0 \quad e \quad a \cdot b > 0,$$

ou na forma equivalente

$$a, b < 0 \Rightarrow (-a) + (-b) = -(a + b) > 0 \quad e \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b > 0.$$

Assim, uma consequência imediata da Definição 2.3 e da Propriedade 13 é:

$$a^2 \equiv a \cdot a > 0, \quad \forall a \neq 0,$$

pelo que

$$1 = 1^2 > 0.$$

**Propriedade 15.** (Propriedade Transitiva)

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (a < b \text{ e } b < c) \Rightarrow a < c.$$

*Dem.* É válida a seguinte sequência de implicações:

$$\begin{aligned} a < b \text{ e } b < c & && \text{(hipótese inicial)} \\ \Rightarrow (b - a) \in \mathbb{R}^+ \text{ e } (c - b) \in \mathbb{R}^+ & && \text{(Definição 2.3)} \\ \Rightarrow ((b - a) + (c - b)) \in \mathbb{R}^+ & && \text{(Propriedade 13 - fecho de } \mathbb{R}^+) \\ \Rightarrow (c - a) \in \mathbb{R}^+ & && \text{(exercício!)} \\ \Rightarrow a < c & && \text{(Definição 2.3)} \end{aligned}$$

□

**Propriedade 16.** (Propriedades Algébricas) Para quaisquer  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , tem-se que:

- (i) se  $a < b$  então  $a + c < b + c$ ;
- (ii) se  $a < b$  e  $c > 0$  então  $a \cdot c < b \cdot c$ ;
- (iii) se  $a < b$  e  $c < 0$  então  $b \cdot c < a \cdot c$ ;
- (iv) se  $a < c$  e  $b < d$  então  $a + b < c + d$ .

**Módulo ou Valor Absoluto.**

**Definição 2.5.** O *módulo* ou *valor absoluto* de um número real  $x \in \mathbb{R}$  é definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

**Exercício 2.6.** Mostre que, para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|x| = |-x| \geq 0, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{e} \quad -|x| \leq x \leq |x|.$$

**Teorema 2.7.** Sejam  $a, x \in \mathbb{R}$ . Tem-se que

$$|x| \leq a \Leftrightarrow x \leq a \wedge x \geq -a.$$

*Dem.* ( $\Rightarrow$ )

Sabemos por hipótese que  $|x| \leq a$ . Usando a propriedade algébrica (iii) obtemos

$$|x| \leq a \Rightarrow -a \leq -|x|.$$

Temos então que

$$-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a,$$

onde as duas desigualdades do meio são o resultado do Exercício 2.6. A Propriedade Transitiva implica imediatamente que

$$-a \leq x \leq a.$$

( $\Leftarrow$ )

Supomos agora por hipótese que  $-a \leq x \leq a$ . Temos então que:

- (a)  $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \leq a$ .
- (b)  $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \leq a$ , onde a última desigualdade é obtida a partir da hipótese  $-a \leq x$  usando novamente a propriedade algébrica (iii).

Conclui-se em qualquer dos casos que  $|x| \leq a$ . □

### 3. AULA – 27 DE SETEMBRO DE 2010

**Última Aula.** Propriedades de Ordem dos números reais. Módulo ou valor absoluto. Teorem 2.7:  $|x| \leq a \Leftrightarrow x \leq a \wedge x \geq -a$ .

**Módulo ou Valor Absoluto (cont.)**

**Corolário 3.1.** Sejam  $a, x \in \mathbb{R}$ . Tem-se que

$$|x| > a \Leftrightarrow x > a \vee x < -a.$$

*Dem.* Basta negar ambos os lados da equivalência do teorema anterior. □

**Teorema 3.2.** (Desigualdade Triangular)

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

*Dem.* Temos pelo Exercício 2.6 que

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad \text{e} \quad -|y| \leq y \leq |y|.$$

Somando estas duas desigualdades e usando a propriedade algébrica (iv) obtemos

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Usando agora o Teorema 2.7, podemos concluir que

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

□

**Exercício 3.3.** Mostre que, para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$|x - y| \leq |x| + |y|, \quad |x| - |y| \leq |x - y| \quad \text{e} \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

**Exercício 3.4.** Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ , mostre que

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \text{e} \quad \frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right|, \quad \text{se } y \neq 0.$$

### Intervalos.

**Definição 3.5.** (Intervalos)  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Intervalo *aberto*:  $]a, b[ \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ .

(Notem que  $]a, a[ = \emptyset \stackrel{\text{def}}{=} \text{conjunto vazio}$ . Porquê?)

Intervalo *fechado*:  $[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ .

(Notem que  $[a, a] = \{a\} = \text{conjunto com apenas um elemento}$ .)

Intervalos *ilimitados*:  $[a, +\infty[ \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$  ou  $]-\infty, a[ \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ . (Notem que  $]0, +\infty[ = \mathbb{R}^+$ .)

O Teorema 2.7 e Corolário 3.1 podem então ser escritos na forma

$$|x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a] \quad \text{e} \quad |x| > a \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -a[ \cup ]a, +\infty[.$$

### Números Naturais.

**Definição 3.6.** (Conjunto Indutivo) Um subconjunto  $A \subset \mathbb{R}$  diz-se um *conjunto indutivo* se satisfaz as seguintes duas condições:

$$(i) 1 \in A \quad \text{e} \quad (ii) a \in A \Rightarrow (a + 1) \in A.$$

**Exemplo 3.7.**  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^+$  são indutivos (porquê?).  $\mathbb{R}^-$  não é indutivo (porquê?).

**Definição 3.8.** (Números Naturais) O conjunto dos *números naturais* é o “menor subconjunto indutivo de  $\mathbb{R}$ ” e representa-se por  $\mathbb{N}$ . Mais precisamente,

$$\mathbb{N} \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{R} : n \text{ pertence a qualquer subconjunto indutivo de } \mathbb{R}\}.$$

**Nota 3.9.** (Informal) Temos então que:  $1 \in \mathbb{N}$ ;  $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1 \in \mathbb{N}$ ;  $3 \stackrel{\text{def}}{=} 2 + 1 \in \mathbb{N}$ ; ... Ou seja,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

**Indução Matemática.** O facto de  $\mathbb{N}$  ser, por definição, “o menor dos subconjuntos indutivos de  $\mathbb{R}$ ” implica que

$$(1) \quad \text{se } A \subset \mathbb{R} \text{ é indutivo então } \mathbb{N} \subset A.$$

**Teorema 3.10.** (Princípio de Indução Matemática) *Se  $A \subset \mathbb{N}$  é indutivo, então  $A = \mathbb{N}$ .*

*Dem.* Como  $A$  é indutivo temos por (1) que  $\mathbb{N} \subset A$ . Como por hipótese  $A \subset \mathbb{N}$ , conclui-se imediatamente que  $A = \mathbb{N}$ .  $\square$

**Método de Indução Matemática.** O Princípio da Indução Matemática, enunciado no Teorema 3.10, está na base de um método eficaz de demonstração de determinadas proposições/propriedades relacionadas com os números naturais: o chamado *Método de Indução Matemática*. Descrevemos de seguida este método, indicando entre parentesis como se relaciona com o Princípio de Indução Matemática.

Designemos por  $P(n)$  uma determinada proposição ou propriedade que se pretende mostrar verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . (Seja  $A = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ é verdade}\}$ . Segue da sua definição que  $A \subset \mathbb{N}$ .) O Método de Indução Matemática consiste em provar separadamente que

- (i)  $P(1)$  é verdadeira. ( $1 \in A$ .)
- (ii) se  $P(n)$  é verdadeira para um determinado  $n \in \mathbb{N}$ , então  $P(n + 1)$  também é verdadeira. ( $n \in A \Rightarrow (n + 1) \in A$ .)

Conclui-se a partir de (i) e (ii) que

$P(n)$  é verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

((i) e (ii) implicam que  $A$  é indutivo, pelo que o Teorema 3.10 permite concluir que  $A = \mathbb{N}$ .)

**Exemplo 3.11.** (Ficha 1, I 1.(a)) Consideremos a seguinte proposição, que queremos mostrar verdadeira para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ :

$$P(n) = \text{é válida a seguinte fórmula: } 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pelo Método de Indução Matemática, a prova faz-se em dois passos.

(i)  $[P(1)]$ . Mostrar que a fórmula dada é válida quando  $n = 1$ , i.e. que

$$1 = \frac{1(1+1)}{2},$$

o que é claramente verdade.

(ii)  $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ . Assumindo como verdadeira a *hipótese*  $P(n)$ , i.e.

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para um determinado } n \in \mathbb{N},$$

há que mostrar a validade da *tese*  $P(n+1)$ , i.e.

$$1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}, \text{ para o mesmo determinado } n \in \mathbb{N}.$$

Isto pode ser feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + (n+1) &= (1 + 2 + \dots + n) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \text{(pela hipótese } P(n)) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

**Símbolo de Somatório.** O Princípio de Indução Matemática está também na base de uma maneira de definir entidades matemáticas relacionadas com os números naturais: as chamadas *Definições por Recorrência*. Descrevemos de seguida uma dessas definições, a do símbolo de somatório, que não é mais do que uma notação muito útil para lidar com somas de várias parcelas.

**Definição 3.12.** Para qualquer  $n \in \mathbb{N}$  e números reais  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , o *símbolo de somatório*

$$\sum_{k=1}^n a_k$$

define-se por recorrência da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 \text{ se } n = 1, \text{ e } \sum_{k=1}^n a_k = \left( \sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) + a_n \text{ se } n > 1.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 a_k &= \sum_{k=1}^1 a_k + a_2 = a_1 + a_2, \\ \sum_{k=1}^3 a_k &= \sum_{k=1}^2 a_k + a_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots \end{aligned}$$

**Nota 3.13.** O índice  $k$  do somatório é um *índice mudo*, desempenhando um papel muito auxiliar. Uma mesma soma pode aparecer na notação de somatório de formas diferentes. Por exemplo:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j.$$

**Exemplo 3.14.** A fórmula que provámos por indução no Exemplo 3.11, pode ser escrita usando o símbolo de somatório da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(i.e. neste caso  $a_k = k$  para  $k = 1, \dots, n$ ).

**Teorema 3.15.** (Propriedades do Somatório – Ficha 2, II 2.)

$$\begin{aligned} (a) \quad \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k && \text{(prop. aditiva)} \\ (b) \quad \sum_{k=1}^n (c \cdot a_k) &= c \left( \sum_{k=1}^n a_k \right), \quad \forall c \in \mathbb{R} && \text{(homogeneidade)} \\ (c) \quad \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) &= a_n - a_0 && \text{(prop. telescópica)} \end{aligned}$$

*Dem.* (a) e (b) ficam como exercício. Provamos (c) por indução.  $[P(1)]$ . Mostrar que a fórmula dada em (c) é válida quando  $n = 1$ , i.e. que

$$\sum_{k=1}^1 (a_k - a_{k-1}) = a_1 - a_0,$$

o que é imediato a partir da Definição 3.12 do símbolo de somatório quando  $n = 1$ .  $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ . Assumindo como verdadeira a hipótese  $P(n)$ , i.e.

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0, \text{ para um determinado } n \in \mathbb{N},$$

há que mostrar a validade da tese  $P(n+1)$ , i.e.

$$\sum_{k=1}^{n+1} (a_k - a_{k-1}) = a_{n+1} - a_0, \text{ para o mesmo determinado } n \in \mathbb{N}.$$

Isto pode ser feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (a_k - a_{k-1}) &= \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) + (a_{n+1} - a_{n+1-1}) && \text{(por def. de somatório)} \\ &= (a_n - a_0) + (a_{n+1} - a_n) && \text{(pela hipótese } P(n)) \\ &= a_{n+1} - a_0 \end{aligned}$$

□

#### 4. AULA – 28 DE SETEMBRO DE 2010

##### Última Aula.

- Método de Indução Matemática. Seja  $P(n)$  uma proposição que se pretende mostrar verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . Se
  - $P(1)$  é verdadeira e
  - $P(n)$  verdadeira para um determinado  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow P(n+1)$  verdadeira, então  $P(n)$  é de facto verdadeira para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .
- Símbolo de Somatório,  $\sum_{k=1}^n a_k$ , definido por recorrência:

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 \text{ se } n = 1, \text{ e } \sum_{k=1}^n a_k = \left( \sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) + a_n \text{ se } n > 1.$$

**Mais Indução e Somatórios.** Nem o Método de Indução, nem o Símbolo de Somatório, têm necessariamente que “começar” em  $n = 1$ . Ambos admitem generalizações simples, tendo como ponto de partida um dado  $m \in \mathbb{Z}$ . O caso  $m = 0$  é ilustrado no exemplo seguinte.

**Exemplo 4.1.** (Ficha 1, II. 6) Vamos neste exemplo mostrar que, para qualquer  $r \in \mathbb{R}$  com  $r \neq 1$  e qualquer  $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,

$$(2) \quad \sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Usaremos o Método de Indução começando em  $n = 0$ .  
 $[P(0)]$ . Mostrar que a fórmula (2) é válida quando  $n = 0$ , i.e. que

$$\sum_{k=0}^0 r^k = \frac{1 - r^1}{1 - r},$$

o que é claramente verdade (ambos os termos são iguais a 1).

Nota: por definição  $r^0 = 1$ .

$[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ . Assumindo como verdadeira a hipótese  $P(n)$ , i.e.

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \text{ para qualquer } 1 \neq r \in \mathbb{R} \text{ e um determinado } n \in \mathbb{N}_0,$$

há que mostrar a validade da tese  $P(n+1)$ , i.e.

$$\sum_{k=0}^{n+1} r^k = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}, \text{ para qualquer } 1 \neq r \in \mathbb{R} \text{ e o mesmo determinado } n \in \mathbb{N}_0.$$

Isto pode ser feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} r^k &= \sum_{k=0}^n r^k + r^{n+1} && \text{(por def. de somatório)} \\ &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} && \text{(pela hipótese } P(n)) \\ &= \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1} - r^{n+2}}{1 - r} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}. \end{aligned}$$

### Números inteiros e racionais.

**Definição 4.2.** O conjunto dos *números inteiros*, representado por  $\mathbb{Z}$ , é o conjunto:

$$\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

ou seja, pode ser formalmente definido por

$$\mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{N} \vee x = 0 \vee (-x) \in \mathbb{N}\}.$$

O conjunto dos *números racionais*, representado por  $\mathbb{Q}$ , é o conjunto dos números reais que são quocientes de dois números inteiros:

$$\mathbb{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{p}{q} \text{ com } p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\}.$$

**Exercício 4.3.** Recorrendo ao Método da Indução Matemática, mostre que  $\mathbb{Z}$  é fechado para a adição e subtração, e que  $\mathbb{Q}$  é fechado para a adição, multiplicação, subtração e divisão.

**Números Irracionais.** É claro que

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} .$$

Será que  $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ ?

Provavelmente, já vos foi dito que números como  $\pi$  e  $\sqrt{2}$  não são racionais. A demonstração da irracionalidade de  $\pi$  é um pouco elaborada, mas a irracionalidade de  $\sqrt{2}$  (algo que os matemáticos da grécia antiga já conheciam!) segue-se das propriedades que já vimos e, em particular, do seguinte facto:

**Exercício 4.4.** Verifique que se  $p \in \mathbb{N}$  e  $p^2$  é um número par então  $p$  também é par.

**Teorema 4.5.** (Irracionalidade de  $\sqrt{2}$ ) *Se  $a \in \mathbb{R}$  e satisfaz  $a^2 = 2$  então  $a \notin \mathbb{Q}$ .*

*Dem.* Vamos supor, sem perda de generalidade, que  $a > 0$ . (Exercício: demonstre o resultado quando  $a \leq 0$ .) Por absurdo, supomos que existiam números naturais  $p$  e  $q$  tais que  $a = p/q$ , ou seja:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Podemos assumir que  $p$  e  $q$  não têm nenhum divisor comum (senão começávamos por simplificar, eliminando esses divisores comuns). Assim, temos que

$$p^2 = 2q^2,$$

donde  $p^2$  é um número par. Concluimos do Exercício 4.4 que  $p$  é par, ou seja  $p = 2k$ , para algum natural  $k \in \mathbb{N}$ . Daqui, segue-se que:

$$p^2 = 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2 \quad (\text{lei do corte}).$$

Logo  $q^2$  é par, e portanto  $q$  também é um número par:  $q = 2s$ , para algum natural  $s \in \mathbb{N}$ .

Assim, acabámos de mostrar que ambos  $p$  e  $q$  possuem 2 como divisor comum, o que contradiz a nossa hipótese de que  $p$  e  $q$  não tinham divisores comuns.  $\square$

Portanto, um número real  $a$  tal que  $a^2 = 2$  não pode ser racional. Mas será que existem números reais cujo quadrado é 2? Na realidade, as propriedades que vimos até agora não são suficientes para responder a esta questão, pois quer  $\mathbb{R}$  quer  $\mathbb{Q}$  satisfazem todas as propriedades acima:

**Exercício 4.6.** Mostre que o conjunto  $\mathbb{Q}$ , dos números racionais, satisfaz todos os Axiomas de Corpo (Propriedades 1-5) e de Ordem (Propriedades 13 e 14).

Assim, se pudessemos utilizar as propriedades que vimos acima para mostrar que a equação  $a^2 = 2$  tem soluções reais, então seguiria-se que essa equação também teria soluções racionais, contradizendo o Teorema 4.5. Estudaremos mais adiante uma propriedade fundamental dos números reais que nos permitem distinguir  $\mathbb{Q}$  de  $\mathbb{R}$ , e mostrar que esta equação tem solução, i.e., que existe o número real  $\sqrt{2}$ .

**Funções Reais de Variável Real.** Vamos agora estudar funções definidas em subconjuntos de  $\mathbb{R}$  com valores em  $\mathbb{R}$ , i.e.

$$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$D \ni x \mapsto f(x).$$

O conjunto  $D \subset \mathbb{R}$  onde a função  $f$  está definida é designado por *domínio* de  $f$ . O *contradomínio* de  $f$  é o conjunto

$$f(D) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ para algum } x \in D\} .$$

Uma função  $f$  diz-se *majorada* (respectivamente *minorada*) se existir  $M \in \mathbb{R}$  (respect.,  $m \in \mathbb{R}$ ) tal que  $f(x) \leq M$  (respect.,  $f(x) \geq m$ ) para todo o  $x \in D$ . Uma função que é simultaneamente majorada e minorada diz-se *limitada*.

O *gráfico* de uma função  $f$  é o subconjunto do plano  $\mathbb{R}^2$  definido por

$$\text{gráfico de } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D \text{ e } y = f(x)\} .$$

Como veremos abaixo, é muitas vezes útil esboçar este conjunto. No entanto, isto nem sempre é fácil ou mesmo possível.

Uma função  $f$  com domínio  $D \subset \mathbb{R}$  diz-se

$$\textit{par} \text{ se } f(x) = f(-x), \forall x \in D,$$

$$\textit{ímpar} \text{ se } f(x) = -f(-x), \forall x \in D,$$

$$\textit{crescente} \text{ se } (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)), \forall x_1, x_2 \in D,$$

$$\text{e } \textit{decrecente} \text{ se } (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)), \forall x_1, x_2 \in D.$$

Uma função  $f$  com domínio  $D \subset \mathbb{R}$  diz-se

$$\textit{periódica} \text{ com período } T > 0 \text{ se } f(x+T) = f(x), \forall x \in D.$$

## 5. AULA – 30 DE SETEMBRO DE 2010

**Última Aula.** Recordámos algumas definições relativas a funções definidas em subconjuntos de  $\mathbb{R}$  com valores em  $\mathbb{R}$ , i.e.

$$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$D \ni x \mapsto f(x).$$

**Exemplos.** Recordemos alguns exemplos de funções elementares já vossas conhecidas.

**Exemplo 5.1.** *Funções polinomiais* são funções com expressão analítica dada por um polinómio, i.e., funções da forma

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n = \sum_{k=0}^n c_kx^k, \text{ com } c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

O domínio de qualquer uma destas funções é  $D = \mathbb{R}$ .

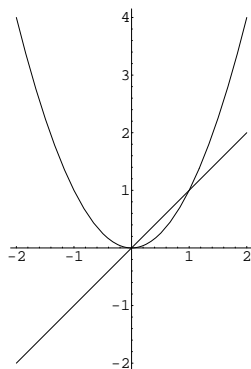


FIGURA 1. Gráfico das funções polinomiais  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(x) = x$  e  $g(x) = x^2$ .

Veremos que quando uma função polinomial tem grau ímpar o seu contradomínio é todo o  $\mathbb{R}$ , enquanto que quando uma função polinomial tem grau par o seu contradomínio é um intervalo da forma  $[m, +\infty[$  ou  $]-\infty, M]$ , com  $m, M \in \mathbb{R}$ . A Figura 1 mostra o gráfico de duas funções polinomiais. Nos exercícios 1 a 5 do grupo IV da Ficha 1 apresentam-se algumas propriedades importantes das funções polinomiais.

**Exemplo 5.2.** *Funções racionais* são funções com expressão analítica dada pelo quociente de dois polinómios, i.e., funções da forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ com } p \text{ e } q \text{ polinómios.}$$

Estas funções não estão definidas nos pontos em que o denominador se anula, pelo que o seu domínio é dado por  $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ .

Um exemplo simples é a função definida por  $f(x) = 1/x$ , cujo gráfico está representado na Figura 2.

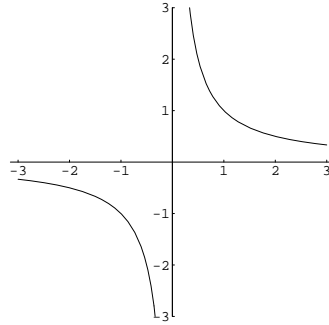


FIGURA 2. Gráfico da função racional  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 1/x$ .

Tanto o seu domínio como contradomínio são  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Esta função é ímpar, decrescente em  $] -\infty, 0[$  e em  $]0, +\infty[$  (mas não em todo o seu domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ).

**Exemplo 5.3.** Duas funções que estão intimamente relacionadas, como será explicado mais adiante, são a *função exponencial*  $f(x) = e^x$ , que possui domínio  $D = \mathbb{R}$ , e a *função logaritmo*  $g(x) = \log(x)$ , que possui  $D = \mathbb{R}^+$ . Os seus gráficos está representado na Figura 3.

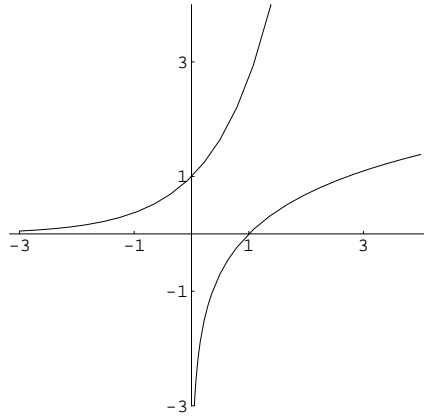


FIGURA 3. Gráfico da função exponencial e da função logaritmo.

São ambas funções estritamente crescentes. O contradomínio da função exponencial é  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ , enquanto que o contradomínio da função logaritmo é  $g(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$ . Portanto, a função exponencial é uma função minorada mas não majorada, enquanto que a função logaritmo não é nem majorada nem minorada.

Algumas propriedades fundamentais da função exponencial e da função logaritmo que devem recordar são as seguintes:

- (i)  $e^0 = 1$  e  $\log(1) = 0$ ;
- (ii)  $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  e  $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ ;
- (iii)  $(e^x)^y = e^{x \cdot y}$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  e  $\log(a^b) = b \cdot \log(a)$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}$ .

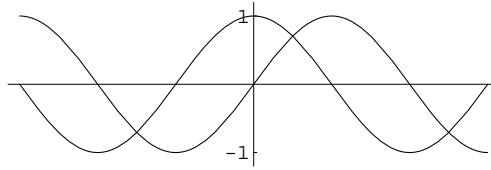


FIGURA 4. Gráfico das funções trigonométricas seno e cosseno.

**Exemplo 5.4.** As funções trigonométricas *seno* e *cosseno* são funções cujo o domínio é todo o  $\mathbb{R}$ . Os seus gráficos estão representados na Figura 4.

Qualquer uma destas funções tem por contradomínio o intervalo  $[-1, 1]$ , sendo portanto funções limitadas. A função seno é ímpar e periódica de período  $2\pi$ , i.e.

$$\text{sen}(x) = -\text{sen}(-x) \quad \text{e} \quad \text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A função cosseno é par e também periódica de período  $2\pi$ , i.e.

$$\text{cos}(x) = \text{cos}(-x) \quad \text{e} \quad \text{cos}(x + 2\pi) = \text{cos}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

As funções seno e cosseno satisfazem a seguinte relação fundamental:

$$(3) \quad \text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Os exercícios 6 e 7 do grupo IV da Ficha 1 apresentam outras propriedades importantes das funções seno e cosseno.

**Exemplo 5.5.** As funções trigonométricas *tangente* e *cotangente* são definidas a partir das funções seno e cosseno:

$$(4) \quad \tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)} \quad \text{e} \quad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\text{cos}(x)}{\text{sen}(x)}.$$

O domínio da função tangente é o subconjunto de  $\mathbb{R}$  definido por

$$D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} : \text{cos}(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}.$$

O seu contradomínio é  $\mathbb{R}$  e o seu gráfico está representado na Figura 5. A função tangente é ímpar e periódica de período  $\pi$ , i.e.

$$\tan(x) = -\tan(-x) \quad \text{e} \quad \tan(x + \pi) = \tan(x), \quad \forall x \in D_{\tan}.$$

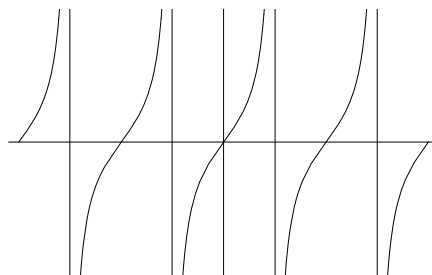


FIGURA 5. Gráfico da função trigonométrica tangente.

O domínio da função cotangente é o subconjunto de  $\mathbb{R}$  definido por

$$D_{\cot} = \{x \in \mathbb{R} : \text{sen}(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}.$$

O seu contradomínio é  $\mathbb{R}$  e a representação do seu gráfico fica como exercício. A função cotangente também é ímpar e periódica de período  $\pi$ , i.e.

$$\cot(x) = -\cot(-x) \quad \text{e} \quad \cot(x + \pi) = \cot(x), \quad \forall x \in D_{\cot}.$$

**Exemplo 5.6.** As funções *seno hiperbólico* e *coseno hiperbólico* são definidas a partir da função exponencial:

$$(5) \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

O domínio das funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico é todo o  $\mathbb{R}$ . Os seus gráficos estão representados na Figura 6.

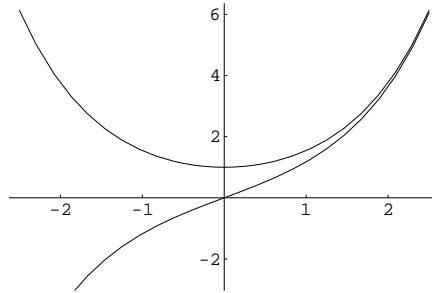


FIGURA 6. Gráfico das funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico.

A função seno hiperbólico é ímpar e tem por contradomínio  $\mathbb{R}$ . A função coseno hiperbólico é par e tem por contradomínio o intervalo  $[1, +\infty[$ . Estas duas funções satisfazem a seguinte relação fundamental:

$$(6) \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

O exercício 8 do grupo IV da Ficha 1 apresenta outras propriedades importantes das funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico.

**Função composta.** Uma forma de produzir novas funções a partir de funções conhecidas é compondo funções.

**Definição 5.7.** Sejam  $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : D_g \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções reais de variável real. A função *composta* ( $f \circ g$ ) é definida por

$$(f \circ g) : D_{f \circ g} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (f \circ g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(g(x)),$$

onde  $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g \text{ e } g(x) \in D_f\}$ .

Temos assim que

$$D_g \supset D_{f \circ g} \xrightarrow{g} g(D_{f \circ g}) \subset D_f \xrightarrow{f} f(D_f) \supset (f \circ g)(D_{f \circ g}) \\ x \longmapsto g(x) = y \longmapsto f(y) = f(g(x))$$

i.e., a função composta  $f \circ g$  corresponde a aplicar primeiro a função  $g$  e de seguida a função  $f$ .

**Exemplo 5.8.** Consideremos as funções  $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad f(y) = \text{sen}(y).$$

Temos então que  $(f \circ g) : D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1/x) = \text{sen}(1/x).$$

O seu gráfico está representado na Figura 7.

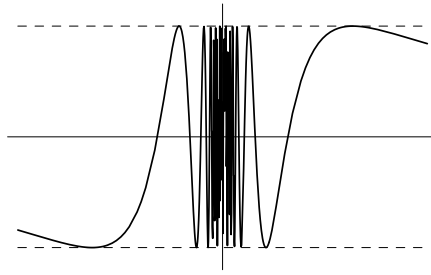


FIGURA 7. Gráfico da função  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \text{sen}(1/x)$ .

## 6. AULA – 04 DE OUTUBRO DE 2010

Na última aula recordámos a noção de função. Antes de prosseguirmos, vale a pena notar que uma função *não é* necessariamente definida por uma expressão algébrica. Na realidade, uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é apenas uma *regra* que a cada número real  $x \in D$  atribui um número real  $f(x) \in \mathbb{R}$ . Os próximos dois exemplos são funções que não são definidas por expressões algébricas.

**Exemplo 6.1.** Consideremos a chamada *função de Heaviside*  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0; \\ 1, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

O seu gráfico está representado na Figura 8.

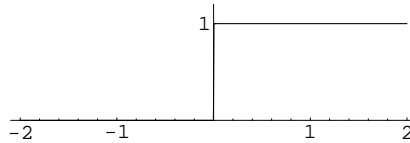


FIGURA 8. Gráfico da função de Heaviside.

Esta função é limitada, crescente, e o seu contradomínio é  $\{0, 1\}$ .

**Exemplo 6.2.** Consideremos a chamada *função de Dirichlet*  $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Esta função é limitada e o seu contradomínio é  $\{0, 1\}$ . Reparem que não é possível esboçar o gráfico desta função da forma usual. Notem que o gráfico está sempre bem definido, e que isto não deve ser confundido com a questão de esboçar o gráfico numa folha de papel.

**Limite de uma função num ponto.** Voçês já viram no Secundário a definição intuitiva de limite de uma função:

Uma função  $f$  tem limite  $b$  quando  $x$  tende para  $a$ , se pudermos fazer  $f(x)$  tão próximo de  $b$  quanto quisermos, tomando  $x$  suficientemente próximo (mas distinto) de  $a$ .

Com esta *definição informal* é possível tratar exemplos simples de funções e calcular limites elementares. No entanto, ela pode dar lugar a alguma confusão quando pretendemos tratar exemplos mais complicados como, por exemplo, o limite de  $f(x) = \text{sen}(1/x)$  quando  $x$  tende para 0, ou da função de Dirichlet quando  $x$  tende para algum  $a$ .

O primeiro problema nesta “definição” está em que não é claro o que se entende por *estar próximo de*. Repare-se que dizer que  $f(x)$  está próximo de  $b$  (respectivamente,  $x$  está próximo

de  $a$ ) deve significar que  $|f(x) - b|$  (resp.  $|x - a|$ ) é pequeno. Assim, podemos refinar a nossa “definição” para:

Uma função  $f$  tem limite  $b$  quando  $x$  tende para  $a$ , se pudermos fazer  $|f(x) - b|$  tão pequeno quanto quisermos, tomando  $|x - a|$  suficientemente pequeno (mas diferente de zero).

Mas agora vemos que temos um outro problema: o que é que queremos dizer com os termos *tão pequeno quanto quisermos e suficientemente pequeno*? Ao esclarecer o verdadeiro significado destes termos chegamos à definição precisa de limite, que é a seguinte:

**Definição 6.3.** Dizemos que uma função  $f$  tem *limite*  $b$  quando  $x$  tende para  $a$  se para todo o  $\varepsilon > 0$  existir  $\delta > 0$  tal que, para todo o  $x$ , se  $0 < |x - a| < \delta$  então  $|f(x) - b| < \varepsilon$ . Em notação de quantificadores, podemos escrever esta condição na forma:

$$(7) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Notem que tudo o que fizermos daqui em diante dependerá desta definição! Por isso, memorizem-na como se fosse a tabuada o mais rapidamente possível. É uma boa ideia começarem por resolver os seguintes exercícios:

**Exercício 6.4.** Usando a definição precisa de limite, mostre que:

- (i) se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função constante, i.e., para a qual existe  $c \in \mathbb{R}$  com  $f(x) = c$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

- (ii) se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a função identidade, i.e.,  $f(x) = x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

**Nota 6.5.** Para definir o limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  não é necessário que  $a$  pertença ao domínio  $D$  de  $f$ . No entanto, deve ser claro que a definição só faz sentido se para todo o  $\delta > 0$  existir  $x \in D$  tal que  $0 < |x - a| < \delta$ . Assumiremos sempre que esta condição se verifica.

A proposição que se segue enuncia um critério útil para o cálculo de alguns limites.

**Proposição 6.6.** Se existirem  $m, M \in \mathbb{R}^+$  tais que

$$0 < |x - a| < m \Rightarrow |f(x) - b| < M|x - a|$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

*Dem.* Dado  $\varepsilon > 0$  arbitrário, seja  $\delta = \min\{m, \varepsilon/M\}$ . Então

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < M|x - a| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

□

**Exemplo 6.7.** Vejamos que para qualquer número real  $a \geq 0$  e natural  $p$  se verifica:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^p = a^p.$$

Pelo exercício 8 do grupo II da Ficha 1, sabemos que é válida a igualdade:

$$a^p - b^p = (a - b) \sum_{k=1}^p a^{p-k} b^{k-1}.$$

Se  $|x - a| \leq 1$  temos que  $|x| \leq a + 1$ , e concluímos que:

$$\begin{aligned} |x^p - a^p| &\leq |x - a| \sum_{k=1}^p |x|^{p-k} |a|^{k-1} \\ &\leq |x - a| \sum_{k=1}^p (a + 1)^{p-k} a^{k-1}. \end{aligned}$$

Assim, podemos aplicar o critério da proposição anterior com  $m = 1$  e  $M = \sum_{k=1}^p (a+1)^{p-k} a^{k-1}$  para concluir que  $\lim_{x \rightarrow a} x^p = a^p$ .

**Exercício 6.8.** Verifique que a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \sqrt{|x|}$  não satisfaz as condições da Proposição 6.6 no ponto  $a = 0$ . Use a definição para mostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} = 0$ .

## 7. AULA – 07 DE OUTUBRO DE 2010

**Última Aula.** Definição de limite:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

**Mais Exemplos.**

**Exemplo 7.1.** Consideremos a função de Heaviside  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Vamos ver que:

$$\lim_{x \rightarrow a} H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } a < 0; \\ 1, & \text{se } a > 0; \\ \text{não existe,} & \text{se } a = 0. \end{cases}$$

Suponhamos primeiro que  $a > 0$ . É claro que se tomarmos  $|x - a| < a$  então  $x > 0$ , logo:

$$0 < |x - a| < a \Rightarrow |H(x) - 1| = |1 - 1| = 0.$$

Portanto, dado  $\varepsilon > 0$  podemos tomar  $\delta = a$  que se verifica:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |H(x) - 1| < \varepsilon,$$

ou seja,  $\lim_{x \rightarrow a} H(x) = 1$ . De forma análoga, mostra-se que se  $a < 0$  então  $\lim_{x \rightarrow a} H(x) = 0$ .

Vejam agora que o  $\lim_{x \rightarrow 0} H(x)$  não existe. Para obter o significado preciso do que significa não existir o limite, começamos por observar o que significa afirmar que uma função  $f$  não tem limite  $b$  quando  $x$  tende para  $a$ . Para isso, basta negarmos a condição na definição de limite:

existe algum  $\varepsilon > 0$  tal que para todo o  $\delta > 0$  existe um  $x$  que satisfaz  $|x - a| < \delta$  e  $|f(x) - b| > \varepsilon$ .

Se preferirmos, em notação de quantificadores:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x : 0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - b| > \varepsilon.$$

Vejam então que para qualquer número real  $b$  a função  $H$  não tem limite  $b$  quando  $x$  tende para 0. Observe que para qualquer  $\delta > 0$ , se  $|x| < \delta$  então temos:

$$\begin{aligned} \text{se } x < 0 &\Rightarrow H(x) = 0 \Rightarrow |H(x) - b| = |b|, \\ \text{se } x > 0 &\Rightarrow H(x) = 1 \Rightarrow |H(x) - b| = |1 - b|. \end{aligned}$$

Portanto, basta tomarmos  $\varepsilon = \frac{1}{2} \max(|b|, |1 - b|)$  para que se verifique:

$$\forall \delta > 0 \exists x : 0 < |x - a| < \delta \wedge |H(x) - b| > \varepsilon,$$

donde o limite não é  $b$ . Como  $b$  era um número real qualquer, concluímos que o limite  $\lim_{x \rightarrow 0} H(x)$  não existe.

**Exercício 7.2.** Considere a função de Dirichlet  $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Mostre que, para qualquer  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} D(x)$  não existe.

**Exemplo 7.3.** Consideremos a função  $f : D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right),$$

e que estudámos brevemente na última aula. O ponto 0 não pertence ao domínio da função, mas ainda faz sentido falar em  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen}(1/x)$  (cf. Nota 6.5).

Começamos por observar que  $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$  e que  $\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -1$ , para qualquer inteiro  $k \in \mathbb{Z}$ . Seja então  $x_k^+ = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$  e  $x_k^- = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ . Se  $b$  é um número real qualquer, temos que:

$$|f(x_k^+) - b| = |1 - b|, \quad |f(x_k^-) - b| = |-1 - b| = |1 + b|.$$

Seja então  $\varepsilon = \frac{1}{2} \max(|1 - b|, |1 + b|)$ . Dado  $\delta > 0$ , podemos sempre escolher um inteiro  $k$  suficientemente grande de forma que  $0 < |x_k^\pm| \leq \delta$ , logo:

$$\forall \delta > 0 \exists x \in D : 0 < |x| < \delta \wedge |f(x) - b| > \varepsilon,$$

donde o limite de  $f$  quando  $x$  tende para 0 não é  $b$ . Como  $b$  era um número real qualquer, concluímos que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  não existe.

**Exemplo 7.4.** Consideremos a função  $f : D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = x \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right).$$

O seu gráfico está representado na Figura 9.

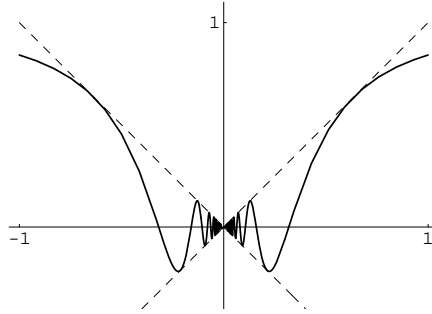


FIGURA 9. Gráfico da função  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}(1/x)$ .

Tendo em conta que  $|\operatorname{sen}(y)| \leq 1$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$ , temos para todo o  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  que

$$0 \leq \left| x \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right) \right| = |x| \cdot \left| \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right) \right| \leq |x|.$$

Segue-se que dado  $\varepsilon > 0$  podemos tomar  $\delta = \varepsilon$  obtendo:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Ou seja, concluímos que:

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Podem encontrar muitos outros exemplos de cálculo de limites através da definição no Spivak, que vos podem ajudar a interiorizar esta noção. Leiam-no!

**Propriedades do Limite de Funções num Ponto.** Vamos agora estudar algumas propriedades elementares do limite de funções que nos ajudarão no seu cálculo, sem termos de recorrer à definição.

**Teorema 7.5.** (Unicidade do Limite) *Seja  $f$  uma função e suponha-se que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b'$ . Então  $b = b'$ .*

*Dem.* Começamos por escrever usando a definição de limite:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon, \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b' &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - b'| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Suponhamos, por absurdo, que  $b \neq b'$ . Então vamos tomar  $\varepsilon = \frac{|b-b'|}{2}$  e, para os  $\delta_1$  e  $\delta_2$  dados por estas definições, escolhamos  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Concluímos que, para todo o  $x$  tal que  $0 < |x - a| < \delta$ , temos:

$$|f(x) - b| < \varepsilon \wedge |f(x) - b'| < \varepsilon,$$

Segue-se que:

$$\begin{aligned} |b - b'| &= |b - f(x) + f(x) - b'| \\ &< |b - f(x)| + |f(x) - b'| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon = |b - b'| \end{aligned}$$

uma contradição. Assim, necessariamente,  $b = b'$ .  $\square$

Note que se  $f$  e  $g$  são funções então podemos formar as seguintes novas funções:

- A função  $f + g$ , dita a *soma* de  $f$  e  $g$  e a função diferença  $f - g$ , dita a *diferença* de  $f$  e  $g$ :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x).$$

- A função  $f \cdot g$ , dita o *produto* de  $f$  e  $g$ :

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x).$$

- A função  $\frac{f}{g}$ , dita o *quociente* de  $f$  por  $g$ :

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Note que o domínio das funções soma, diferença e produto, é a intersecção  $D_f \cap D_g$  dos domínios das funções parcelas. O domínio da função quociente  $\frac{f}{g}$  é:

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\}.$$

Finalmente, dada uma função  $f$  e um número real  $c \in \mathbb{R}$  podemos considerar a função  $cf$  definida por:

$$(cf)(x) = cf(x),$$

e cujo domínio é o mesmo que o domínio de  $f$ . Também podemos pensar nesta função como o produto da função constante  $g(x) = c$  pela função  $f$ .

**Teorema 7.6.** (Limite e Operações Algébricas) *Sejam  $f$  e  $g$  funções tais que*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad e \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c.$$

Então:

- (i)  $\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c.$
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c.$
- (iii) se  $c \neq 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c}.$$

*Dem.* Vamos demonstrar em detalhe a propriedade (i). As demonstrações das outras propriedades são análogas e podem ser encontradas no Spivak.

Começamos por recorrer à definição de limite para escrever:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Assim, se escolhermos  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta &\Rightarrow |(f \pm g)(x) - (b \pm c)| = |(f(x) - b) \pm (g(x) - c)| \\ &\leq |f(x) - b| + |g(x) - c| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

o que mostra que:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c.$$

$\square$

**Exemplo 7.7.** Recorrendo a este resultado é muito fácil calcular certos limites sem ter de passar pelo processo doloroso de encontrar os  $\varepsilon - \delta$  correctos. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^2 + 1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} (x^4 - 3x + 2)}{\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + 1)} \quad (\text{pelo Teorema 7.6 (iii)}) \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} x^4 - \lim_{x \rightarrow a} 3x + \lim_{x \rightarrow a} 2}{\lim_{x \rightarrow a} x^2 + \lim_{x \rightarrow a} 1} \quad (\text{pelo Teorema 7.6 (i)}) \\ &= \frac{a^4 - 3a + 2}{a^2 + 1} \quad (\text{pelo Exemplo 6.7}) \end{aligned}$$

8. AULA - 11 DE OUTUBRO DE 2010

**Última Aula.** Operações algébricas e limites.

**Princípio do Encaixe ou da Função Enquadrada.**

**Teorema 8.1.** *Sejam  $f$ ,  $g$  e  $h$  funções tais que*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

*para qualquer  $x \in D_f \cap D_g \cap D_h$ . Temos então que*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = \lim_{x \rightarrow a} h(x) \implies \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b.$$

*Dem.* Pela definição de limite podemos escrever:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - b < \varepsilon, \\ \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow -\varepsilon < h(x) - b < \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , tomamos  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Usando o facto de que  $g$  está encaixada entre  $f$  e  $h$ , obtemos:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} g(x) - b \leq h(x) - b < \varepsilon \\ g(x) - b \geq f(x) - b > -\varepsilon \end{cases} \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b.$$

□

**Exemplo 8.2.** Uma análise simples do círculo trigonométrico permite mostrar que, para  $0 < |x| < \pi/2$  é válida a relação:

$$0 < \cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1.$$

Como:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} 1,$$

concluimos pelo princípio do encaixe que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

**Limite de Funções Compostas.**

**Teorema 8.3.** *Sejam  $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : D_g \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções reais de variável real, e  $(f \circ g) : D_{f \circ g} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a sua função composta. Se*

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow b} f(y) = c \in \mathbb{R},$$

*então*

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c.$$

*Dem.* Pela definição de limite (notem a alteração nos nomes das variáveis!):

$$(9) \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \Leftrightarrow \forall \gamma > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - b| < \gamma,$$

$$(10) \quad \lim_{y \rightarrow b} f(y) = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \gamma > 0 : 0 < |y - b| < \gamma \Rightarrow |f(y) - c| < \varepsilon.$$

Seja então dado  $\varepsilon > 0$ . Tomamos  $\gamma > 0$  tal que (10) é satisfeita, e de seguida, para esta escolha de  $\gamma$  tomamos  $\delta > 0$  tal que (9) é satisfeita. Segue-se que:

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta &\Rightarrow |g(x) - b| < \gamma, && \text{(por (9))} \\ &\Rightarrow |f(g(x)) - c| < \varepsilon, && \text{(por (10)).} \end{aligned}$$

Logo, concluímos que:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - c| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c.$$

□

**Exemplo 8.4.** Suponhamos que pretendemos calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2}$ . Observamos que:

$$\frac{\text{sen}(x^2)}{x^2} = f(g(x)),$$

onde  $g(x) = x^2$  e  $f(y) = \frac{\text{sen } y}{y}$ . Como já sabemos que (ver Exemplo 8.2):

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen } y}{y} = 1,$$

o Teorema 8.3 mostra que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2} = 1.$$

### Limites Relativos e Laterais.

**Definição 8.5.** Sejam  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $A \subset D$  um subconjunto do seu domínio. Diremos que  $f$  tem limite  $b$  no ponto  $a$  relativo ao conjunto  $A$ , e escreveremos

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b,$$

se a restrição de  $f$  ao conjunto  $A$ ,  $f|_A : A \rightarrow \mathbb{R}$ , tem limite  $b$  no ponto  $a$ , i.e., se  $\lim_{x \rightarrow a} f|_A(x) = b$ , o que por definição de limite significa

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (x \in A \text{ e } 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

**Nota 8.6.** Como já foi referido na Nota 6.5 para o limite usual, para definir o limite relativo  $\lim_{x \rightarrow a} f|_A(x)$  não é necessário que  $a$  pertença ao conjunto  $A \subset D$ , bastando que para todo o  $\delta > 0$  exista  $x \in A$  tal que  $0 < |x - a| < \delta$ .

**Nota 8.7.** Há dois casos particularmente importantes desta definição de limite relativo, dando origem aos chamados *limites laterais*:

- (i) quando  $A = D \cap ]a, +\infty[$  temos o chamado limite lateral à direita, ou simplesmente *limite à direita*, que será denotado por  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ . Recorrendo a quantificadores podemos escrever:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (x \in D \text{ e } 0 < x - a < \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

- (ii) quando  $A = D \cap ]-\infty, a[$  temos o chamado limite lateral à esquerda, ou simplesmente *limite à esquerda*, que será denotado por  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ . Novamente, usando quantificadores podemos escrever:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (x \in D \text{ e } 0 < a - x < \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

**Exemplo 8.8.** Vimos que a função de Heaviside  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0; \\ 1, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

não tem  $\lim_{x \rightarrow 0} H(x)$ . No entanto, tem limites laterais no ponto zero dados por

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} H(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) = 1.$$

**Exercício 8.9.** Para uma função  $f$ , mostre que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe e é igual a  $b$  sse existem os limites laterais  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ , e são ambos iguais a  $b$ .

**Recta Acabada, Indeterminações e limites.**

**Definição 8.10.** Designa-se por *recta acabada*, e representa-se por  $\overline{\mathbb{R}}$ , o conjunto

$$\overline{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Os elementos  $-\infty$  e  $+\infty$  satisfazem a relação de ordem

$$-\infty < x < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

bem como as regras operacionais algébricas que se descrevem de seguida.

As regras operacionais algébricas com os elementos  $-\infty$  e  $+\infty$  são determinadas por forma a que os Axiomas de Corpo (Propriedades 1-5 dos números reais; cf. Nota 1.2) continuem a ser válidos na recta acabada  $\overline{\mathbb{R}}$ . Quando numa determinada operação não for possível determinar uma regra nestas condições, diremos que estamos perante uma *indeterminação*.

Relativamente à adição, temos que

$$a + (+\infty) = +\infty \quad \text{e} \quad a + (-\infty) = -\infty, \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

bem como

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \quad \text{e} \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

Por outro lado,

$$(11) \quad (+\infty) + (-\infty) \text{ é uma indeterminação do tipo } \infty - \infty.$$

**Nota 8.11.** À primeira vista, tendo em conta a propriedade do simétrico, poderia parecer razoável definir  $(+\infty) + (-\infty) = 0$ . Esta definição iria no entanto contrariar a propriedade associativa:

$$(a + (+\infty)) + (-\infty) = (+\infty) + (-\infty) = 0 \quad \text{mas} \quad a + ((+\infty) + (-\infty)) = a + 0 = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Problemas semelhantes estão na origem das restantes indeterminações. Verifiquem que de facto assim é!

Relativamente à multiplicação, temos que

$$a \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & \text{se } a > 0; \\ \mp\infty, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Temos também que

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty = (-\infty) \cdot (-\infty) \quad \text{e} \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Por outro lado,

$$(12) \quad 0 \cdot (\pm\infty) \text{ é uma indeterminação do tipo } 0 \cdot \infty.$$

Esta indeterminação dá naturalmente origem a indeterminações na divisão: as chamadas indeterminações do tipo

$$(13) \quad \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\infty} \cdot \infty = 0 \cdot \infty$$

e

$$(14) \quad \frac{0}{0} = 0 \cdot \frac{1}{0} = 0 \cdot \infty.$$

Relativamente à potenciação  $a^b$ , com  $a \geq 0$ , temos que

$$a^{+\infty} = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq a < 1; \\ +\infty, & \text{se } a > 1; \end{cases} \quad \text{e} \quad a^{-\infty} = \frac{1}{a^{+\infty}},$$

bem como

$$(+\infty)^b = \begin{cases} 0, & \text{se } b < 0; \\ +\infty, & \text{se } b > 0. \end{cases}$$

Por outro lado

$$(15) \quad 1^{+\infty} \text{ é uma indeterminação do tipo } 1^\infty,$$

e

$$(16) \quad (+\infty)^0 \text{ é uma indeterminação do tipo } \infty^0.$$

Esta última indeterminação está directamente relacionada com a

$$(17) \quad \text{indeterminação do tipo } 0^0$$

já existente em  $\mathbb{R}$ .

Queremos agora definir limites na recta acabada, de forma que faça sentido falar nos limites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

e ainda que o resultado de um limite possa ser  $\pm\infty$ . Para isso, define-se a *vizinhança de raio*  $\varepsilon > 0$  de um ponto  $a \in \mathbb{R}$  como sendo o conjunto

$$V_\varepsilon(a) = ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[.$$

A definição de *limite de uma função* pode ser escrita na forma

$$(18) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in V_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(b).$$

Se definirmos vizinhança de raio  $\varepsilon > 0$  de  $-\infty$  e  $+\infty$  por

$$V_\varepsilon(-\infty) = ]-\infty, -1/\varepsilon[ \quad \text{e} \quad V_\varepsilon(+\infty) = ]1/\varepsilon, +\infty[ ,$$

a definição (18) continua a fazer sentido na recta acabada

$$\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

i.e., para  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Passaremos assim a usá-la também neste contexto.

**Exercício 8.12.** Verifique que a definição (18) para o limite na recta acabada  $\overline{\mathbb{R}}$  tem os seguintes significados:

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R} \text{ sse}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists L > 0 : x > L \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \in \mathbb{R} \text{ sse}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists L > 0 : x < -L \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \text{ onde } a \in \mathbb{R}, \text{ sse}$$

$$\forall L > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > L.$$

$$(iv) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty, \text{ onde } a \in \mathbb{R}, \text{ sse}$$

$$\forall L > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -L.$$

Verifique, ainda, o que significa  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ , e  $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$ .

**Exercício 8.13.** Mostre que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty.$$

**Exemplo 8.14.** O conhecimento que temos das funções exponencial e logaritmo, permitem-nos afirmar que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x) = -\infty.$$

Estes factos, que só provaremos rigorosamente mais tarde no curso, serão usados em exemplos e podem (e devem) ser usados na resolução de exercícios.

Os resultados que estudámos na última aula sobre operações algébricas e limites (Teorema 7.6) e limite de funções compostas (Teorema 8.3), continuam a ser válidas para a recta acabada  $\mathbb{R}$ , desde que não originem alguma das indeterminações referidas anteriormente. Ilustramos isto mesmo no nosso próximo exemplo.

**Exemplo 8.15.** Vimos na aula anterior que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1.$$

Usando este facto, pretende-se completar o gráfico da Figura 9 do Exemplo 7.4 calculando o limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Notem que a propriedade algébrica (ii) do Teorema 7.6 dá neste caso origem a uma indeterminação do tipo  $\infty \cdot 0$ , pelo que não pode ser usada para calcular este limite.

Consideremos as funções  $g, f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad f(y) = \frac{\text{sen}(y)}{y}.$$

Temos então que  $(f \circ g) : D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1/x) = \frac{\text{sen}(1/x)}{1/x} = x \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Como

$$+\infty \in \overline{D_{f \circ g}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \overline{\mathbb{R}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(y)}{y} = 1,$$

podemos concluir pelo Teorema 8.3 que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Na notação do Teorema 8.3, temos que neste exemplo

$$a = +\infty, \quad b = 0 \quad \text{e} \quad c = 1.$$

A análise anterior pode ser escrita abreviadamente da seguintes forma:

$$\text{considerando a mudança de variável } y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}, \text{ em que } x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow 0,$$

temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \cdot \text{sen}(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(y)}{y} = 1.$$

A Figura 10 apresenta uma versão mais completa do gráfico da Figura 9, tendo já em conta o limite calculado neste exemplo.

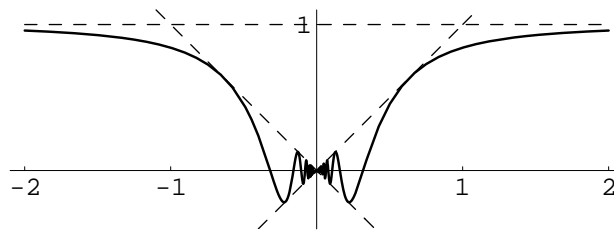


FIGURA 10. Versão mais completa do gráfico da função  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x \cdot \text{sen}(1/x)$ .

### 9. AULA – 12 DE OUTUBRO DE 2010

**Continuidade de Funções Reais de Variável Real.** Dada uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  a relação:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

pode não se verificar. De facto, esta igualdade pode falhar por várias razões:

- O limite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow a$  não existe (por exemplo, a função  $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$  em  $a = 0$ ; cf. Exemplo 7.3).
- O limite existe, mas o ponto  $a$  não pertence ao domínio  $D$ , e portanto não faz sentido sequer falar em  $f(a)$  (por exemplo, a função  $f(x) = x \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$  em  $a = 0$ ; cf. Exemplo 7.4).
- O limite existe,  $a$  pertence ao domínio, mas o limite é diferente de  $f(a)$  (construam um exemplo!).

Este tipo de comportamento pode ser considerado anormal, e por isso convencionou-se um nome para qualificar as funções que se portam bem:

**Definição 9.1.** Uma função  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se *contínua num ponto*  $a \in D$  se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

e diz-se *contínua* se for contínua em todos os pontos do seu domínio  $D$ .

Intuitivamente uma função é contínua se o seu gráfico não apresenta interrupções, saltos ou oscilações. Embora esta ideia intuitiva seja muitas vezes suficiente para decidir se uma função é contínua olhando para o seu gráfico, há situações em que isso não é de todo claro, e por isso a definição precisa que demos acima é muito importante. Em termos de  $\varepsilon - \delta$ , uma função  $f$  é contínua em  $a$  se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Naturalmente que as propriedades do limite de uma função num ponto dão origem a propriedades análogas para as funções contínuas. O teorema seguinte ilustra este facto.

**Teorema 9.2.**

- Se  $f$  e  $g$  são funções contínuas num ponto  $a \in D_f \cap D_g$ , então  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$  e  $f/g$  (se  $g(a) \neq 0$ ) também são contínuas em  $a$ .
- Sejam  $f$  e  $g$  duas funções. Se  $a \in D_{f \circ g}$ ,  $g$  é contínua em  $a$  e  $f$  é contínua em  $g(a)$ , então  $(f \circ g)$  é contínua em  $a$ .

*Dem.* Consequência imediata da Definição 9.1 e dos Teoremas 7.6 e 8.3. □

**Continuidade Lateral.** A noção de limites laterais introduzida na Nota 8.7 dá naturalmente origem à seguinte definição de *continuidade lateral*.

**Definição 9.3.** Sejam  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $a \in D$  um ponto do seu domínio. Diremos que:

- $f$  é *contínua à direita* em  $a$  se  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ;
- $f$  é *contínua à esquerda* em  $a$  se  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ .

**Teorema 9.4.** *Sejam  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $a \in D$  um ponto do seu domínio.  $f$  é contínua em  $a$ , i.e.*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

sse  $f$  é contínua à direita e à esquerda em  $a$ , i.e.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x).$$

*Dem.* Exercício simples. □

**Exemplo 9.5.** A função de Heaviside  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ 1, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

é contínua à direita no ponto zero, mas não é contínua à esquerda nesse ponto. De facto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) = 1 = H(0) \quad \text{mas} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} H(x) = 0 \neq H(0).$$

**Exemplos de Funções contínuas.** O que já sabemos sobre limites permite-nos decidir se muitas funções são contínuas ou não.

**Exemplo 9.6.**

- (a) uma função polinomial  $p(x)$  é contínua em qualquer ponto  $a \in \mathbb{R}$ .
- (b) qualquer função racional  $f = p/q$ , com  $p, q$  polinómios, é contínua em qualquer ponto  $a \in \mathbb{R}$  onde  $q(a) \neq 0$ ;
- (c) a função módulo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = |x|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , é contínua em qualquer ponto  $a \in \mathbb{R}$ ;
- (d) a função de Heaviside, apresentada no Exemplo 6.1, é contínua em qualquer ponto  $a \neq 0$  e descontínua no ponto zero.
- (e) a função de Dirichlet, apresentada no Exemplo 6.2, é descontínua em qualquer ponto  $a \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 9.7.** As funções trigonométricas, exponencial e logaritmo são contínuas em todos os pontos do seu domínio. Estes factos, que só serão provados mais à frente neste curso, serão usados desde já tanto em exemplos como nos exercícios.

**Exemplo 9.8.** (*Prolongamento por Continuidade*) Consideremos a função  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Se  $a \neq 0$ ,  $F$  é numa vizinhança de  $a$  o produto/composição de funções contínuas, pelo que é contínua. Por outro lado, recorrendo ao Exemplo 7.4, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right) = 0 = F(0).$$

Logo,  $F$  também é contínua em  $a = 0$ . Assim,  $F$  é contínua em todo o  $\mathbb{R}$ .

Esta função  $F$  é um exemplo de *prolongamento por continuidade*. Mais precisamente, é o prolongamento por continuidade da função  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ ,  $\forall x \neq 0$ , ao ponto zero. O grupo I da Ficha 2 tem uma série de exercícios relativos a este tipo de prolongamentos por continuidade.

**Algumas Propriedades Locais das Funções Contínuas.**

**Teorema 9.9.** *Sejam  $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : D_g \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções contínuas num ponto  $a \in D_f \cap D_g$ . Se  $f(a) > g(a)$  então*

$$\exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > g(x).$$

*Dem.* Como  $f$  e  $g$  são por hipótese contínuas em  $a \in D_f \cap D_g$ , sabemos que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

e

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon.$$

Escolhamos  $\varepsilon, \delta > 0$  tais que

$$0 < \varepsilon < \frac{f(a) - g(a)}{2} \quad \text{e} \quad \delta = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}.$$

Temos então que:

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta &\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |g(x) - g(a)| < \varepsilon \\ &\Rightarrow f(x) > f(a) - \varepsilon \quad \text{e} \quad g(x) < g(a) + \varepsilon \\ &\Rightarrow f(x) - g(x) > (f(a) - \varepsilon) - (g(a) + \varepsilon) \\ &\Rightarrow f(x) - g(x) > f(a) - g(a) - 2\varepsilon > 2\varepsilon - 2\varepsilon = 0, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é consequência da escolha feita para  $\varepsilon$ . □

**Corolário 9.10.** *Se  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua num ponto  $a \in D$  com  $f(a) > 0$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > 0$  para qualquer  $x \in V_\delta(a) \cap D$ .*

*Dem.* Basta usar o Teorema 9.9 com  $g =$  função identicamente zero. □

**Teorema 9.11.** *Se  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua num ponto  $a \in D$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $f$  é limitada em  $V_\delta(a) \cap D$ .*

*Dem.* Exercício. □

## 10. AULA – 14 DE OUTUBRO DE 2010

**Propriedades Globais das Funções Contínuas.** Na última aula vimos que quando uma função é contínua num ponto  $a$  podemos obter informação sobre o comportamento local da função, i.e., numa vizinhança de  $a$ . Vamos agora ver que quando uma função é contínua num intervalo  $[a, b]$  então podemos obter informação sobre o comportamento global da função, i.e., em todo o intervalo  $[a, b]$ .

Vamos começar por enunciar três resultados muito importantes, e depois deduzir algumas consequências. A demonstração destes resultados só será feita na próxima aula.

**Teorema 10.1.** (Teorema do Valor Intermédio ou de Bolzano) *Seja  $f$  uma função contínua num intervalo limitado e fechado  $[a, b]$ , tal que  $f(a) \neq f(b)$ . Então, para qualquer valor  $\alpha \in \mathbb{R}$  entre  $f(a)$  e  $f(b)$ , existe um ponto  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = \alpha$ .*

Este resultado afirma que uma função contínua  $f$  num intervalo  $[a, b]$  assume todos os valores entre  $f(a)$  e  $f(b)$ . Geometricamente, isto significa que o gráfico de  $f$  intersecta a recta horizontal  $y = \alpha$  sempre que  $\alpha$  esteja entre  $f(a)$  e  $f(b)$ , como se ilustra na seguinte figura.

\*\*\* FALTA A FIGURA \*\*\*

**Teorema 10.2.** *Se  $f$  é uma função contínua num intervalo limitado e fechado  $[a, b]$ , então  $f$  é limitada nesse intervalo, i.e., o contradomínio  $f([a, b])$  é um conjunto limitado ou, de forma equivalente, existe  $M > 0$  tal que  $|f(x)| < M$  para qualquer  $x \in [a, b]$ .*

Geometricamente, este resultado diz que o gráfico de  $f$  está entre duas rectas horizontais, como na seguinte figura.

\*\*\* FALTA A FIGURA \*\*\*

Para enunciar o terceiro e último resultado fundamental, vamos introduzir a seguinte notação:

**Definição 10.3.** Seja  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Diremos que  $f$  tem *máximo* (resp. *mínimo*) no conjunto  $D$  se existir um ponto  $c \in D$  tal que  $f(x) \leq f(c)$ ,  $\forall x \in D$  (resp.  $f(x) \geq f(c)$ ,  $\forall x \in D$ ). Neste caso,  $c$  diz-se *ponto de máximo* (resp. *ponto de mínimo*) de  $f$  em  $D$ , e  $f(c)$  diz-se o *máximo* (resp. *mínimo*) de  $f$  em  $D$ .

**Teorema 10.4.** (Teorema de Weierstrass) *Se  $f$  é uma função contínua num intervalo limitado e fechado  $[a, b]$ , então  $f$  tem máximo e mínimo nesse intervalo.*

A figura seguinte ilustra este resultado:

\*\*\* FALTA A FIGURA \*\*\*\*

Notem que para qualquer um destes resultados ser válido, a função  $f$  tem de ser contínua em todos os pontos do intervalo  $[a, b]$ . Basta a continuidade falhar nalgum ponto para um destes resultados deixar de ser válido, como se ilustra nos exemplos seguintes:

**Exemplo 10.5.** Se restringirmos a função de Heaviside  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ao intervalo  $[-1, 1]$ :

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -1 \leq x < 0, \\ 1, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

obtemos uma função que é contínua excepto na origem. Temos que  $f(-1) = 0$  e  $f(1) = 1$ , mas a função não assume quaisquer valores  $\alpha$  entre 0 e 1, falhando portanto as conclusões do Teorema do Valor Intermédio. Notem que esta função é limitada e tem máximo e mínimo.

**Exemplo 10.6.** Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esta função é contínua em todos os pontos do intervalo  $[0, 1]$  excepto em  $x = 0$ . Por outro lado,  $f$  não é limitada neste intervalo, falhando as conclusões do Teorema 10.2 e do Teorema de Weierstrass.

Este exemplo também mostra que nas hipóteses do Teorema 10.2 e do Teorema de Weierstrass não podemos substituir o intervalo fechado  $[a, b]$  pelo intervalo aberto  $]a, b[$ .

**Exemplos de Aplicações dos Teoremas Globais.** Vejamos agora algumas consequências e aplicações destes teoremas globais. O Teorema de Bolzano tem o seguinte corolário imediato:

**Corolário 10.7.** *Seja  $f$  uma função contínua num intervalo  $[a, b] \subset D$ , tal que  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Então existe um ponto  $c \in ]a, b[$  tal que  $f(c) = 0$ .*

**Exemplo 10.8.** Vejamos como este corolário do Teorema de Bolzano pode ser usado para mostrar que qualquer polinómio do terceiro grau,  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$p(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ com } a_3 \neq 0,$$

tem pelo menos um zero em  $\mathbb{R}$ , i.e., existe pelo menos um ponto  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $p(c) = 0$ .

De facto, supondo sem perda de generalidade que  $a_3 > 0$ , temos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \left( a_3 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3} \right) = (-\infty)^3 \cdot a_3 = -\infty,$$

enquanto que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot \left( a_3 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^3} \right) = (+\infty)^3 \cdot a_3 = +\infty.$$

Logo, existem  $a \in \mathbb{R}^-$  e  $b \in \mathbb{R}^+$  tais que  $p(a) < 0$  e  $p(b) > 0$ , pelo que o Corolário 10.7 do Teorema de Bolzano garante a existência de um ponto  $c \in ]a, b[$  tal que  $p(c) = 0$ .

**Nota 10.9.** O resultado do Exemplo 10.8 generaliza-se facilmente para qualquer polinómio de grau ímpar, mas não para qualquer polinómio de grau par. Por exemplo, o polinómio de segundo grau  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por  $p(x) = x^2 + 1$  não tem zeros em  $\mathbb{R}$ . Recordem que a necessidade de encontrar zeros para este polinómio (i.e., soluções para a equação  $x^2 + 1 = 0$ ) é uma das motivações para a introdução e construção do corpo dos números complexos  $\mathbb{C}$ .

Ainda assim, podemo-nos perguntar o que é que os teoremas fundamentais acima nos permitem dizer sobre as soluções de equações polinómicas de grau par. De facto eles permitem-nos, por exemplo, resolver uma questão que já discutimos anteriormente:

**Teorema 10.10.** *Para todo o  $\alpha > 0$  a equação:*

$$x^2 = \alpha,$$

*tem uma solução positiva. Será naturalmente designada por  $\sqrt{\alpha}$ .*

*Dem.* Já sabemos que uma função polinomial é contínua, logo  $f(x) = x^2$  é contínua. Dado  $\alpha > 0$ , existe um real  $b > 0$  tal que  $f(b) > \alpha$ : se  $\alpha > 1$  podemos tomar  $b = \alpha$ ; se  $\alpha = 1$  podemos tomar qualquer  $b > 1$ ; se  $\alpha < 1$  podemos tomar  $b = 1$ . Assim, a função  $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz  $f(0) < \alpha < f(b)$ , e pelo Teorema de Bolzano concluímos que existe  $x \in ]0, b[$  tal que  $f(x) = x^2 = \alpha$ .  $\square$

Recordem-se que nós mostrámos que a equação  $x^2 = 2$  não tem raízes racionais, e na altura mostrámos que não podíamos decidir sobre a existência de raízes reais baseados apenas nos axiomas de corpo (Propriedades 1-5) e ordem (Propriedades 13 e 14) dos números reais. No entanto, fomos capazes de deduzir a partir dos teoremas fundamentais acima que esta equação tem de facto raízes reais! Assim, qualquer demonstração destes resultados requer alguma propriedade adicional dos números reais que ainda não estudámos. É isso que faremos na próxima aula.

**Exercício 10.11.** Use um raciocínio análogo ao da demonstração do Teorema 10.10 para mostrar que, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ , existem:

$$\sqrt[n]{\alpha} \in \mathbb{R}^+, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \text{e} \quad \sqrt[2n+1]{\alpha} \in \mathbb{R}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

## 11. AULA – 18 DE OUTUBRO DE 2010

**Propriedade do Supremo.** Na última aula enunciámos três resultados fundamentais. Nesta aula vamos demonstrar estes resultados. Para isso, vamos introduzir as seguintes notações:

**Definição 11.1.** (Majorantes e Minorantes) Seja  $A \subset \mathbb{R}$  um subconjunto qualquer. Um número real  $x \in \mathbb{R}$  diz-se um *majorante* de  $A$  (resp. *minorante* de  $A$ ) se  $x \geq a$  (resp.  $x \leq a$ ) para qualquer  $a \in A$ . O conjunto  $A$  diz-se *majorado* ou *limitado superiormente* (resp. *minorado* ou *limitado inferiormente*) se tiver majorantes (resp. minorantes), e diz-se *limitado* se for majorado e minorado.

**Exemplo 11.2.** Seja  $A$  o subconjunto de  $\mathbb{R}$  dado por

$$A = \{-1\} \cup ]0, 1[ = \{x \in \mathbb{R} : x = -1 \vee 0 < x < 1\}.$$

Temos então que:

$$\begin{aligned} \text{Majorantes de } A &= \{x \in \mathbb{R}, x \geq 1\} = [1, +\infty[ , \\ \text{Minorantes de } A &= \{x \in \mathbb{R}, x \leq -1\} = ]-\infty, -1] . \end{aligned}$$

**Definição 11.3.** (Supremo e Ínfimo) Seja  $A \subset \mathbb{R}$  um subconjunto qualquer. Um número real  $b \in \mathbb{R}$  diz-se *supremo* de  $A$  (resp. *ínfimo* de  $A$ ) se satisfaz as seguintes duas condições:

- (i)  $b$  é majorante de  $A$ , i.e.  $b \geq a$  para qualquer  $a \in A$  (resp.  $b$  é minorante de  $A$ , i.e.  $b \leq a$  para qualquer  $a \in A$ );
- (ii) não há majorantes de  $A$  menores do que  $b$ , i.e.  $b \leq x$  para qualquer majorante  $x$  de  $A$  (resp. não há minorantes de  $A$  maiores do que  $b$ , i.e.  $b \geq x$  para qualquer minorante  $x$  de  $A$ ).

**Teorema 11.4.** (Unicidade do Supremo e do Ínfimo) *O supremo e o ínfimo de um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$ , quando existem, são únicos e serão designados por  $\sup A$  e  $\inf A$ .*

*Dem.* Sejam  $b, b' \in \mathbb{R}$  supremos (resp. ínfimos) de  $A$ . Sendo ambos majorantes (resp. minorantes) de  $A$ , a condição (ii) anterior implica simultaneamente que

$$b \leq b' \quad \text{e} \quad b' \leq b .$$

O Propriedade 14 da tricotomia diz-nos imediatamente que  $b = b'$ . □

A seguinte proposição enuncia uma propriedade muito útil do supremo e do ínfimo.

**Proposição 11.5.** (Ficha 2, II. 1) *Seja  $A \subset \mathbb{R}$  um subconjunto com supremo  $s = \sup A$  (resp. ínfimo  $r = \inf A$ ). Então:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a > s - \varepsilon \quad (\text{resp. } \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a < r + \varepsilon).$$

*Dem.* Faremos apenas o caso do supremo (o do ínfimo é análogo). Suponhamos por absurdo que a propriedade enunciada não era verdadeira. Então existiria  $\varepsilon > 0$  tal que  $a \leq s - \varepsilon$  para qualquer  $a \in A$ . Isto significaria que  $s - \varepsilon$  era um majorante de  $A$  menor do que  $s = \sup A$ , o que contraria a definição de supremo. Logo, a propriedade enunciada tem que ser verdadeira. □

**Definição 11.6.** (Máximo e Mínimo) Seja  $A \subset \mathbb{R}$  um subconjunto qualquer. Quando existe supremo de  $A$  e este pertence ao conjunto  $A$ , i.e.  $\sup A \in A$ , diremos que  $A$  tem *máximo* e que  $\max A = \sup A$ . De forma análoga, quando existe ínfimo de  $A$  e este pertence ao conjunto  $A$ , i.e.  $\inf A \in A$ , diremos que  $A$  tem *mínimo* e que  $\min A = \inf A$ .

**Exemplo 11.7.** Consideremos o subconjunto  $A \subset \mathbb{R}$  do Exemplo 11.2:

$$A = \{-1\} \cup ]0, 1[ = \{x \in \mathbb{R} : x = -1 \vee 0 < x < 1\}.$$

Temos então que:

$$\begin{aligned} \sup A = 1 \notin A &\Rightarrow A \text{ não tem máximo,} \\ \inf A = -1 \in A &\Rightarrow A \text{ tem mínimo e } \min A = -1. \end{aligned}$$

**Nota 11.8.** Observem que dada uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(c)$  é máximo de  $f$  em  $D$  (ver Definição 10.3) sse é o máximo do conjunto  $f(D)$ , i.e., do contradomínio de  $f$ .

Depois desta digressão, recordemos agora o:

**Teorema 11.9.** (Teorema do Valor Intermédio ou de Bolzano) *Seja  $f$  uma função contínua num intervalo limitado e fechado  $[a, b]$ , tal que  $f(a) \neq f(b)$ . Então, para qualquer valor  $\alpha \in \mathbb{R}$  entre  $f(a)$  e  $f(b)$ , existe um ponto  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = \alpha$ .*

*Dem. do Teorema de Bolzano.* Vamos supôr que  $f(a) < f(b)$  (o caso  $f(a) > f(b)$  é inteiramente análogo) e fixemos um número real  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $f(a) < \alpha < f(b)$ . Um número  $c \in (a, b)$  que é candidato natural a solução de  $f(c) = \alpha$  é o supremo do conjunto

$$C = \{x \in [a, b] : f(x) < \alpha\}.$$

Vamos então **supôr que existe o supremo** deste conjunto que designamos por  $c = \sup C$ . Como  $a \in C$  e  $b$  é majorante de  $C$ , temos necessariamente que  $a \leq c \leq b$ . Para provar que  $f(c) = \alpha$ , provamos separadamente que  $f(c) \leq \alpha$  e  $f(c) \geq \alpha$ .

- $f(c) \leq \alpha$ . Suponha-se, por absurdo, que  $f(c) > \alpha$ . A função  $g(x) = f(x) - \alpha$  é contínua em  $c$  e satisfaz  $g(c) > 0$ . Pelo Corolário 9.10, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $g(x) > 0$  para todo o  $x \in ]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$ . Isto significa que  $f(x) > \alpha$  para todo o  $x \in ]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$ , pelo que  $C \cap ]c - \varepsilon, c + \varepsilon[ = \emptyset$  o que contradiz a propriedade do supremo dada pela Proposição 11.5
- $f(c) \geq \alpha$ . Suponha-se, por absurdo, que  $f(c) < \alpha$ . A função  $g(x) = \alpha - f(x)$  é contínua em  $c$  e satisfaz  $g(c) > 0$  logo, pelo Corolário 9.10, existe  $c' > c$  tal que  $g(c') > 0$ , ou seja  $f(c') < \alpha$ . Isto significa que  $c < c'$  e  $c' \in C$ . Logo  $c$  não poderia ser majorante de  $C$ , o que contradiz o facto de  $c = \sup C$ .

Assim,  $c \in [a, b]$  e  $f(c) = \alpha$ , como queríamos demonstrar. Notem que, de facto,  $c \in (a, b)$  pois  $f(c) = \alpha \neq f(a), f(b)$ .  $\square$

Esta demonstração está *incompleta* pois falta mostrar que o conjunto  $C$  tem supremo! Este facto não pode ser deduzido dos axiomas de corpo (Propriedades 1-5) e ordem (Propriedades 13 e 14) dos números reais. Precisamos então de uma nova propriedade dos números reais:

**Propriedade 17.** (Propriedade do Supremo)

*Qualquer subconjunto de  $\mathbb{R}$  majorado e não-vazio tem supremo.*

Tudo o que faremos de agora em diante depende deste facto fundamental. Por isso, memorizem-no e procurem compreendê-lo o melhor possível!

Recorrendo a esta propriedade, vemos imediatamente que o conjunto  $C$  tem supremo pois é majorado (por  $b$ , por exemplo) e é não-vazio (contém  $a$ , por exemplo). Assim, a demonstração fica completa.

**Exercício 11.10.** (Propriedade do Ínfimo)

Mostrem (usando a Propriedade do Supremo) que qualquer subconjunto de  $\mathbb{R}$  minorado e não-vazio tem ínfimo.

As demonstrações dos outros dois resultados fundamentais, que vimos na última aula, também recorrem à Propriedade do Supremo.

**Teorema 11.11.** *Se  $f$  é uma função contínua num intervalo limitado e fechado  $[a, b]$ , então  $f$  é limitada nesse intervalo, i.e., o contradomínio  $f([a, b])$  é um conjunto limitado ou, de forma equivalente, existe  $M > 0$  tal que  $|f(x)| < M$  para qualquer  $x \in [a, b]$ .*

*Dem.* De forma análoga à demonstração do Teorema de Bolzano, introduzimos o conjunto:

$$C = \{x \in [a, b] : f \text{ é limitada em } [a, x]\}.$$

Claramente este conjunto é não-vazio pois contém  $a$ . Por outro lado,  $C$  é um conjunto majorado por  $b$ . Pela Propriedade do Supremo temos que existe  $\alpha = \sup C$ . Vejamos que, de facto,  $b = \alpha$ :

- $\alpha > a$ . Como  $f$  é contínua em  $a$ , pelo Teorema 9.11, existe  $\delta > 0$  tal que  $f$  é limitada em  $[a, a + \delta)$ . Portanto,  $f$  é limitada em  $[a, a + \delta/2]$  donde  $\alpha \geq a + \delta/2 > a$ .

- $\alpha = b$ . Suponhamos, por absurdo, que  $a < \alpha < b$ . Como  $f$  é contínua em  $\alpha \in ]a, b[$ , pelo Teorema 9.11 concluímos que existe  $\delta > 0$  tal que  $f$  é limitada em  $] \alpha - \delta, \alpha + \delta[$ . Mas então  $f$  é limitada em  $[a, \alpha - \delta]$  e em  $] \alpha - \delta, \alpha + \delta[$ , logo é limitada em  $[a, \alpha + \delta/2]$ , o que contradiz o facto de que  $\alpha$  é o supremo de  $C$ .

Assim, temos que  $b = \sup C$  e portanto  $f$  é limitada em qualquer intervalo  $[a, x]$  com  $x < b$ .

Isto não mostra ainda que  $f$  é limitada em  $[a, b]$ , porque ainda não sabemos se  $b = \sup C \in C$ , i.e. se  $b = \max C$ . Mas basta agora observar que  $f$  é contínua em  $b$ , logo pelo Teorema 9.11, existe  $\delta > 0$  tal que  $f$  é limitada em  $(b - \delta, b]$ . Se  $f$  é limitada em  $[a, b - \delta]$  e em  $(b - \delta, b]$  então  $f$  é limitada em  $[a, b]$ , como pretendíamos mostrar.  $\square$

Finalmente, falta mostrar o:

**Teorema 11.12.** (Teorema de Weierstrass) *Se  $f$  é uma função contínua num intervalo limitado e fechado  $[a, b]$ , então  $f$  tem máximo e mínimo nesse intervalo.*

*Dem. do Teorema de Weierstrass.* Vamos mostrar que  $f$  tem máximo. A demonstração que  $f$  tem mínimo é inteiramente análoga.

Consideremos o contradomínio de  $f$ , i.e. o conjunto dos valores que  $f$  toma em  $[a, b]$ :

$$C = \{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Este conjunto é obviamente não vazio e, pelo teorema anterior, é limitado. A Propriedade do Supremo garante que existe  $M = \sup C$ . Tudo o que temos a fazer é mostrar que  $M \in C$ , pois isso significa que existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = M \geq f(x)$  para todo o  $x \in [a, b]$ .

Suponha-se, por absurdo, que  $M \neq f(c)$  para todo o  $c \in [a, b]$ . Então podemos definir a função  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Esta função é contínua, pois é a composta de funções contínuas e o denominador não se anula. Pela propriedade do supremo  $M = \sup C$  dada pela Proposição 11.5, temos que para todo o  $\varepsilon > 0$  existe  $x \in [a, b]$  tal que  $f(x) > M - \varepsilon$ , ou seja,

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Isto mostra que  $g$  não é limitada em  $[a, b]$ , o que contradiz o Teorema 10.2 que mostrámos anteriormente.  $\square$

## 12. AULA – 19 DE OUTUBRO DE 2010

**Derivada de Uma Função num Ponto.** A noção de *derivada* é a primeira das duas noções fundamentais do Cálculo que vamos estudar. A outra é a noção de *integral* que será estudada mais tarde.

A noção de derivada de uma função pode ser motivada das mais variadas formas. Por exemplo, a origem do conceito de derivada está ligada à Física e alguns dos resultados que vamos estudar tem interpretações físicas imediatas, recorrendo a conceitos como o de velocidade e aceleração. No entanto, preferimos recorrer a um problema geométrico simples, que permite mostrar que a derivada é de facto um conceito matemático preciso e importante em muitas aplicações.

A questão que colocamos é a seguinte: Dada uma função  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , que num ponto  $a \in D$  tem o valor  $f(a) \in \mathbb{R}$ , qual a recta do plano  $\mathbb{R}^2$  que melhor aproxima o gráfico de  $f$  num vizinhança do ponto  $(a, f(a))$ ? A resposta a esta questão é, naturalmente, a recta *tangente* ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, f(a))$ . Surge então o problema de como calcular a equação dessa recta tangente.

Denotando por  $(x, y)$  as coordenadas de um ponto arbitrário do plano  $\mathbb{R}^2$ , a equação de qualquer recta não vertical que passe no ponto  $(a, f(a))$  é dada por

$$(y - f(a)) = m \cdot (x - a),$$

onde  $m \in \mathbb{R}$  é arbitrário e representa o *declive* da recta determinada pela equação. A resolução do nosso problema passa pois por calcular *o declive da recta tangente ao gráfico de uma função  $f$  num ponto  $(a, f(a))$* .

Esse cálculo pode ser feito com base na noção de limite. De facto, a recta tangente ao gráfico de uma função  $f$  num ponto  $(a, f(a))$  pode ser obtida como o “limite” de rectas secantes ao mesmo gráfico, como ilustra a Figura 11.

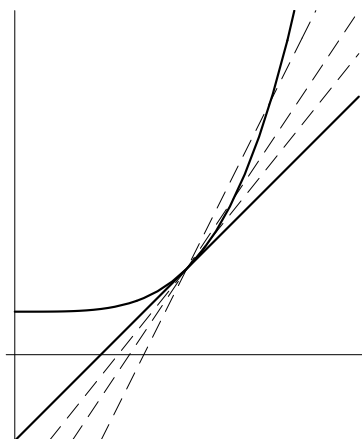


FIGURA 11. A recta tangente como limite de rectas secantes.

Assim, para cada  $h \in \mathbb{R}$  suficientemente pequeno, podemos considerar a única recta do plano que passa nos pontos  $(a, f(a))$  e  $(a + h, f(a + h))$ . É uma recta secante ao gráfico de  $f$  e o seu declive é dado por

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Quando  $h \rightarrow 0$ , as correspondentes rectas secantes “tendem” para a recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, f(a))$ , pelo que é natural considerar que o declive desta última é dado pelo limite dos declives das rectas secantes:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

onde a igualdade é consequência da mudança de variável  $h = x - a \Leftrightarrow x = a + h$ . Somos assim levados a colocar a seguinte definição formal:

**Definição 12.1.** Seja  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $a \in D$  um ponto do seu domínio. Diremos que  $f$  é diferenciável no ponto  $a \in D$  com derivada  $f'(a)$  se existir em  $\mathbb{R}$  o limite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Antes ainda de vermos alguns exemplos, três comentários a esta definição:

- O primeiro comentário é que a notação para a derivada  $f'(a)$  sugere que devemos pensar na derivada como uma função. De facto assim é: a cada  $a$  em que o limite na Definição 12.1 existe associamos o número real  $f'(a)$ . Assim, o domínio  $D_{f'}$  da função derivada é um subconjunto do domínio de  $f$ .
- O segundo comentário é que, embora tenha sido a noção geométrica intuitiva de recta tangente a motivar a Definição 12.1 de derivada de uma função, nós ainda não temos uma definição matemática precisa de recta tangente. Mas podemos agora usar a noção de derivada para dar uma definição precisa:

**Definição 12.2.** Seja  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável num ponto  $a \in D$ . A recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, f(a))$  é a recta definida no plano pela equação

$$(19) \quad (y - f(a)) = f'(a) \cdot (x - a).$$

- O terceiro e último comentário tem a haver com a interpretação física da derivada. Se  $x(t)$  representa a posição de um objecto em movimento no instante de tempo  $t$ , então a razão:

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

representa a “velocidade média” do objecto no intervalo de tempo  $[t, t+h]$ . Podemos pois pensar na derivada

$$x'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

como a *velocidade instantânea* do objecto no instante  $t$ . Assim, podemos dizer que a velocidade instantânea do objecto é a taxa de variação da posição.

Notem, ainda, que a noção de taxa de variação faz sentido em qualquer situação em que uma quantidade varia. É por isso que a noção de derivada é tão importante quer em Matemática quer nas aplicações.

### Exemplos.

**Exemplo 12.3.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x) = \alpha x + \beta, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

onde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  são constantes. Temos então que, para qualquer  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\alpha x + \beta) - (\alpha a + \beta)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x - a)}{x - a} = \alpha. \end{aligned}$$

Concluimos assim que

$$(20) \quad f(x) = \alpha x + \beta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 12.4.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x) = \text{sen}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Usando o resultado da alínea (g) do exercício 6 do grupo IV da Ficha 2, que nos diz que

$$\text{sen}(a) - \text{sen}(b) = 2 \text{sen} \left( \frac{a-b}{2} \right) \cos \left( \frac{a+b}{2} \right), \quad \forall a, b \in \mathbb{R},$$

temos então que, para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \text{sen} \left( \frac{h}{2} \right) \cos \left( x + \frac{h}{2} \right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \left( \frac{h}{2} \right)}{\frac{h}{2}} \cdot \cos \left( x + \frac{h}{2} \right) \\ &= \cos(x), \end{aligned}$$

onde a última igualdade usa o limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$  e o facto do coseno ser uma função contínua.

Concluimos assim que a derivada da função  $f(x) = \text{sen } x$  existe em todos os pontos  $x \in \mathbb{R}$  e que a função derivada é a função  $f'(x) = \cos x$ .

**Exercício 12.5.** Mostre que a derivada da função  $g(x) = \cos x$  existe em todos os pontos  $x \in \mathbb{R}$  e que a função derivada é a função  $g'(x) = -\text{sen } x$ .

**Exemplo 12.6.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x) = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Temos então que, para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x, \end{aligned}$$

onde a última igualdade usa o limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  que será estudado mais adiante.

Concluimos assim que a derivada da função  $f(x) = e^x$  existe em todos os pontos  $x \in \mathbb{R}$  e que a função derivada é ela própria:  $f'(x) = e^x$ .

**Exemplo 12.7.** Seja  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x) = \log x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Temos então que, para qualquer  $x \in \mathbb{R}^+$ ,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}.$$

Considerando a mudança de variável

$$t = \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) \Leftrightarrow e^t = 1 + \frac{h}{x} \Leftrightarrow x(e^t - 1) = h \quad \text{em que} \quad h \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 0,$$

temos então que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{x(e^t - 1)} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} = \frac{1}{x}$$

onde na última igualdade usamos novamente o limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .

Concluimos assim que a derivada da função  $f(x) = \log x$  existe em todos os pontos  $x \in \mathbb{R}^+$  e que a função derivada é  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .

**Exercício 12.8.** Para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ , mostre que a função  $f(x) = x^n$  possui derivada em todos os  $x \in \mathbb{R}$  e que a sua função derivada é:  $f'(x) = n x^{n-1}$ . Sugestão: expandir  $(x+h)^n$  usando o binômio de Newton.

**Exemplo 12.9.** É possível mostrar que, para qualquer expoente  $\alpha \in \mathbb{R}$ , a função  $f(x) = x^\alpha$  possui derivada em todos os pontos  $x \in \mathbb{R}^+$  e que a sua função derivada é  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ .

### 13. AULA – 21 DE OUTUBRO DE 2010

Na última aula introduzimos a noção de derivada de uma função:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Uma outra notação em voga para derivada é a *notação de Leibniz*:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f = f'(x).$$

Por exemplo, nesta notação, temos as seguintes derivadas que foram calculadas na última aula:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\alpha x + \beta) &= \alpha \quad (x \in \mathbb{R}); & \frac{d}{dx} \sin x &= \cos x \quad (x \in \mathbb{R}); \\ \frac{d}{dx} x^\alpha &= \alpha x^{\alpha-1} \quad (x \in \mathbb{R}^+, \alpha \in \mathbb{R}); & \frac{d}{dx} \cos x &= -\sin x \quad (x \in \mathbb{R}); \\ \frac{d}{dx} \log x &= \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R}^+); & \frac{d}{dx} e^x &= e^x \quad (x \in \mathbb{R}); \end{aligned}$$

### Derivadas Laterais.

**Definição 13.1.** Sejam  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $a \in D$  um ponto do seu domínio. Diremos que:

(i)  $f$  tem *derivada lateral à direita* em  $a$  se existir o limite

$$f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a};$$

(ii)  $f$  tem *derivada lateral à esquerda* em  $a$  se existir o limite

$$f'_e(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a};$$

**Teorema 13.2.** Sejam  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $a \in D$  um ponto do seu domínio.  $f$  é diferenciável no ponto  $a$  sse  $f$  tem derivadas laterais iguais nesse ponto. Nesse caso, tem-se naturalmente que  $f'_e(a) = f'(a) = f'_d(a)$ .

*Dem.* Exercício simples. □

**Exemplo 13.3.** A função módulo,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0, \\ x, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

cujo gráfico está representado na Figura 12, tem derivadas laterais no ponto zero mas não é diferenciável nesse ponto.

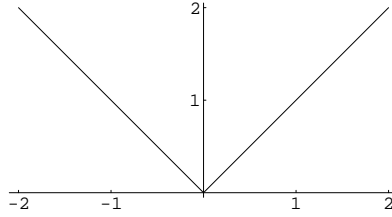


FIGURA 12. Gráfico da função módulo.

De facto,

$$f'_e(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x} = -1 \quad \text{e}$$

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x} = 1.$$

Logo,  $f'_e(0) = -1 \neq 1 = f'_d(0)$  pelo que a função módulo não é diferenciável no ponto zero.

**Diferenciabilidade e Continuidade.** Deve ser claro que uma função que possui derivada é “mais bem comportada” que uma função que é apenas contínua. Esta ideia é tornada precisa pelo:

**Teorema 13.4.** Se  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável num ponto  $a \in D$  então  $f$  é contínua em  $a$ .

*Dem.* Consideremos a função  $\rho : D \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\rho(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad \forall x \in D \setminus \{a\}.$$

Como  $f$  é por hipótese diferenciável no ponto  $a \in D$ , sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \rho(x) = f'(a) \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado,

$$\rho(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Leftrightarrow f(x) = f(a) + (x - a) \cdot \rho(x), \forall x \in D \setminus \{a\}.$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= f(a) + \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \cdot \rho(x) \\ &= f(a) + 0 \cdot f'(a) = f(a), \end{aligned}$$

pelo que  $f$  é contínua em  $a \in D$ . □

**Nota 13.5.** O Teorema 13.4 diz-nos que

$$f \text{ diferenciável em } a \Rightarrow f \text{ contínua em } a.$$

A afirmação recíproca não é verdadeira, i.e.

$$f \text{ contínua em } a \not\Rightarrow f \text{ diferenciável em } a.$$

Por exemplo, a função módulo do Exemplo 13.3 é contínua no ponto zero mas não é diferenciável nesse ponto.

Por outro lado, o Teorema 13.4 é equivalente a afirmar que

$$f \text{ não é contínua em } a \Rightarrow f \text{ não é diferenciável em } a.$$

Por exemplo, a função de Heaviside não é contínua no ponto zero (Exemplo 9.5) pelo que também não é diferenciável nesse ponto.

### Regras Algébricas de Derivação.

**Teorema 13.6.** *Sejam  $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : D_g \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis num ponto  $a \in D_f \cap D_g$ . Seja ainda  $c \in \mathbb{R}$  uma constante. Então, as funções  $c \cdot f$ ,  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$  e  $f/g$  (se  $g(a) \neq 0$ ) também são diferenciáveis no ponto  $a$ , sendo as suas derivadas dadas por:*

$$\begin{aligned} (c \cdot f)'(a) &= c \cdot f'(a) \\ (f \pm g)'(a) &= f'(a) \pm g'(a) \\ (f \cdot g)'(a) &= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) && \text{(Regra de Leibniz)} \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2} \end{aligned}$$

**Nota 13.7.** As duas primeiras regras algébricas de derivação enunciadas neste teorema, dizem-nos que a derivação é uma operação *linear*.

*Dem.* Provaremos apenas a Regra de Leibniz:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(a + h) - (f \cdot g)(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) \cdot g(a + h) - f(a) \cdot g(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) \cdot g(a + h) - f(a) \cdot g(a + h) + f(a) \cdot g(a + h) - f(a) \cdot g(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( g(a + h) \cdot \frac{f(a + h) - f(a)}{h} + f(a) \cdot \frac{g(a + h) - g(a)}{h} \right) \\ &= \left( \lim_{h \rightarrow 0} g(a + h) \right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} + f(a) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h} \\ &= g(a) \cdot f'(a) + f(a) \cdot g'(a), \end{aligned}$$

onde na última igualdade se usou naturalmente o facto de  $f$  e  $g$  serem diferenciáveis em  $a$ , bem como o facto de  $g$  ser também contínua em  $a$  (Teorema 13.4). □

**Exemplo 13.8.** As funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico são definidas por

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{cosh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{cf. Exemplo 5.6}).$$

Usando a derivada da função exponencial determinada na última aula (Exemplo 12.6) e a fórmula do Teorema 13.6 para a derivada do quociente, temos que

$$(e^{-x})' = \left( \frac{1}{e^x} \right)' = \frac{(1)' \cdot e^x - 1 \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{-e^x}{e^{2x}} = -e^{-x}.$$

Usando também a linearidade da derivação, especificada pelas duas primeiras regras algébricas do Teorema 13.6, obtemos o seguinte resultado para as derivadas das funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico:

$$(21) \quad (\operatorname{senh})'(x) = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{cosh}(x);$$

$$(22) \quad (\operatorname{cosh})'(x) = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh}(x).$$

**Exemplo 13.9.** Seja  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função tangente, i.e. definida por

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)}, \quad \forall x \in D = D_{\tan} \quad (\text{cf. Exemplo 5.5}).$$

Usando a fórmula do Teorema 13.6 para a derivada do quociente, podemos calcular a derivada desta função tangente num qualquer ponto  $x \in D_{\tan}$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (\tan)'(x) &= \left( \frac{\operatorname{sen}}{\operatorname{cos}} \right)'(x) \\ &= \frac{(\operatorname{sen})'(x) \cdot \operatorname{cos}(x) - \operatorname{sen}(x) \cdot (\operatorname{cos})'(x)}{(\operatorname{cos})^2(x)} \\ &= \frac{\operatorname{cos}(x) \cdot \operatorname{cos}(x) - \operatorname{sen}(x) \cdot (-\operatorname{sen}(x))}{\operatorname{cos}^2(x)} \\ &= \frac{\operatorname{cos}^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{cos}^2(x)} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2(x)}, \end{aligned}$$

onde se usaram as derivadas das funções seno e coseno determinadas na última aula (Exemplo 12.4 e Exercício 12.5), bem como a relação fundamental (3) entre o seno e o coseno.

Concluimos assim que

$$(23) \quad \frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{1}{\operatorname{cos}^2(x)}, \quad \forall x \in D_{\tan}.$$

#### 14. AULA – 25 DE OUTUBRO DE 2010

Continuamos com o nosso estudo de técnicas para o cálculo de derivadas.

#### Derivada de Funções Compostas.

**Teorema 14.1.** *Sejam  $g : D_g \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável num ponto  $a \in D_g$  e  $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável no ponto  $b = g(a) \in D_f$ . Então, a função composta  $(f \circ g)$  é diferenciável no ponto  $a \in D_{f \circ g}$  e*

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

*Dem.* Vamos assumir que existe  $\delta > 0$  tal que, para qualquer  $h \in ]-\delta, \delta[$  com  $(a+h) \in D_g$ , tem-se  $g(a+h) \neq g(a)$ . Caso contrário, prova-se facilmente que  $g'(a) = 0 = (f \circ g)'(a)$  (exercício), o que confirma a validade do teorema.

Usando a definição de derivada, temos então que:

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(g(a+h)) - f(g(a))) \cdot (g(a+h) - g(a))}{h \cdot (g(a+h) - g(a))} \quad (g(a+h) \neq g(a)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}.\end{aligned}$$

Como  $g$  é por hipótese diferenciável em  $a$ , temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = g'(a).$$

Por outro lado, considerando a mudança de variável  $y = g(a+h)$ , em que  $h \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow g(a) = b$  (porque, pelo Teorema 13.4,  $g$  é contínua em  $a$ ), e usando o Teorema 8.3 referente ao limite de uma função composta, temos também que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(y) - f(b)}{y - b} = f'(b),$$

onde se usou, na última igualdade, o facto de  $f$  ser por hipótese diferenciável no ponto  $b = g(a)$ .

Podemos então concluir que:

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\ &= f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).\end{aligned}$$

□

**Exemplo 14.2.** Seja  $g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função positiva e, dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , consideremos a função  $g^\alpha : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  definida por  $(g^\alpha)(x) = g(x)^\alpha$ ,  $\forall x \in D$ . Observando que  $g^\alpha = (f \circ g)$ , com  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  definida por  $f(y) = y^\alpha$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}^+$ , podemos usar o Teorema 14.1 e o resultado do Exemplo 12.9 para concluir que, se  $g$  é diferenciável num ponto  $a \in D$ , então  $g^\alpha$  também é diferenciável nesse ponto  $a$  e

$$\begin{aligned}(g^\alpha)'(a) &= (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) \\ &= (\alpha y^{\alpha-1})|_{y=g(a)} \cdot g'(a) \\ &= \alpha g(a)^{\alpha-1} \cdot g'(a).\end{aligned}$$

Ou seja:

$$\frac{d}{dx} g^\alpha(x) = \alpha g(x)^{\alpha-1} \frac{d}{dx} g(x).$$

**Exemplo 14.3.** Quando o expoente  $\alpha$  do exemplo anterior é um número inteiro, não é necessário que a função  $g$  seja positiva para a validade do resultado. Na realidade, para qualquer  $n \in \mathbb{Z}$  e qualquer função  $g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , diferenciável num ponto  $a \in D$ , a função  $g^n : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  também é diferenciável nesse ponto  $a \in D$  e

$$(24) \quad \frac{d}{dx} g^n(x) = n g(x)^{n-1} \frac{d}{dx} g(x).$$

Por exemplo, temos que:

$$\frac{d}{dx} \text{sen}^5(x) = 5 \text{sen}^4(x) \cos(x).$$

**Nota 14.4.** Na notação de Leibniz a regra da função composta pode ser escrita na forma:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dy} f(y) \Big|_{y=g(x)} \cdot \frac{d}{dx} g(x).$$

Muitas vezes esta fórmula é expressa na seguinte forma abreviada: se  $y = g(x)$  e  $z = f(y)$ , então:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Nesta forma existe um certo abuso pois, por exemplo,  $z$  no lado esquerdo significa a função composta  $f(g(x))$  enquanto que  $z$  no lado direito significa a função  $f(y)$ . No entanto, este tipo de expressão é útil como ilustramos de seguida.

Suponhamos que queremos calcular a derivada da função  $\log(x^2 + 1)$ . Então tomamos  $z = \log y$  e  $y = x^2 + 1$ . Temos pois:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot (2x).$$

No final devemos substituir  $y$  por  $x^2 + 1$ , obtendo:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2x}{x^2 + 1},$$

que é o resultado correcto.

### Diferenciabilidade e Extremos Locais.

**Definição 14.5.** Seja  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $c \in D$  um ponto do seu domínio. Diremos que  $f$  tem um *máximo local em  $c$*  (resp. um *mínimo local em  $c$* ) se existir um  $\delta > 0$  tal que  $f(x) \leq f(c)$ ,  $\forall x \in V_\delta(c) \cap D$  (resp.  $f(x) \geq f(c)$ ,  $\forall x \in V_\delta(c) \cap D$ ). Diremos que  $f$  tem um *extremo local em  $c$*  se  $f$  tiver um máximo ou mínimo locais em  $c \in D$ .

**Teorema 14.6.** *Seja  $f$  uma função definida num intervalo aberto  $I = ]a, b[$ , tal que  $f$  tem um extremo local num ponto  $c \in I$ . Então, se  $f$  é diferenciável no ponto  $c$ , tem-se que  $f'(c) = 0$ .*

*Dem.* Suponhamos que  $f$  tem um máximo local no ponto  $c \in I = ]a, b[$  (a demonstração é inteiramente análoga para o caso do mínimo local). Sabemos então que existe  $\delta > 0$  tal que

$$f(x) \leq f(c) \Leftrightarrow f(x) - f(c) \leq 0, \forall x \in V_\delta(c) = ]c - \delta, c + \delta[.$$

Usando este facto, temos então que

$$f'_e(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{\leq 0}{\leq 0} \geq 0,$$

enquanto que

$$f'_d(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{\leq 0}{\geq 0} \leq 0.$$

Como  $f$  é por hipótese diferenciável no ponto  $c$ , podemos concluir que

$$0 \leq f'_e(c) = f'(c) = f'_d(c) \leq 0 \Rightarrow f'(c) = 0.$$

□

**Nota 14.7.** O Teorema 14.6 diz-nos que

$$f \text{ diferenciável e com extremo local em } c \Rightarrow f'(c) = 0.$$

A afirmação recíproca não é verdadeira, i.e.

$$f \text{ diferenciável e } f'(c) = 0 \not\Rightarrow f \text{ tem extremo local em } c.$$

Por exemplo, a função polinomial  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^3$ , cujo gráfico está representado na Figura 13, é diferenciável e tem derivada nula no ponto zero, mas não tem um extremo local nesse ponto.

Um ponto  $c$  onde  $f'(c) = 0$  chama-se um *ponto crítico* de  $f$ . Assim, resumindo a nossa discussão, um extremo local é também um ponto crítico, mas podem existir pontos críticos que não são extremos locais.

**Nota 14.8.** Uma função pode ter um extremo local num ponto sem que seja diferenciável nesse ponto. Por exemplo, a função módulo do Exemplo 13.3 tem um mínimo no ponto zero mas não é diferenciável nesse ponto.

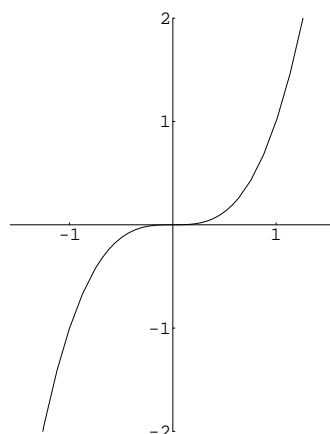


FIGURA 13. Gráfico da função polinomial  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^3$ .

**Exemplo 14.9.** O Teorema 14.6 fornece-nos um método para calcular o máximo e o mínimo de uma função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (recordem-se que pelo Teorema Weierstrass sabemos que existe um máximo e um mínimo), De facto, os pontos onde  $f$  pode ter um máximo ou mínimo são:

- (1) Os pontos de  $]a, b[$  onde  $f$  não é diferenciável;
- (2) Os pontos críticos de  $f$  em  $]a, b[$ ;
- (3) Os extremos  $a$  e  $b$ .

Assim, apenas há que determinar estes pontos e depois calcular  $f$  em cada um destes pontos para verificar se são máximos ou mínimos de  $f$ .

Por exemplo, seja  $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  a função  $f(x) = x^3 - x$ . Esta função tem derivada  $f'(x) = 3x^2 - 1$  para todo o  $x \in [-1, 2]$ . Assim, não existem pontos do primeiro tipo a considerar. Como  $f'(x) = 0$  sse

$$3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

e  $\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \in ]-1, 2[$ , estes são os pontos do segundo tipo a considerar. Finalmente, temos os extremos do intervalo  $x = -1$  e  $x = 2$ .

Temos então que calcular os valores de  $f$  em cada um destes pontos. Verifiquem que:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad f(-1) = 0, \quad f(2) = 6.$$

Portanto, o máximo de  $f$  é 6 e ocorre em  $x = 2$ ; o mínimo é  $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$  e ocorre em  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

15. AULA - 26 DE OUTUBRO DE 2010

### Teorema de Rolle.

**Teorema 15.1.** (Teorema de Rolle) *Seja  $f$  uma função definida e contínua num intervalo limitado e fechado  $[a, b]$ , e diferenciável em  $]a, b[$ . Então*

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in ]a, b[ : f'(c) = 0.$$

*Dem.* Como  $f$  está nas condições do Teorema 10.4 - Weierstrass, sabemos que  $f$  tem máximo e mínimo em  $[a, b]$ :

$$M = \max_{[a,b]} f \quad \text{e} \quad m = \min_{[a,b]} f.$$

Se  $M = m$ , então  $f$  é uma função constante em  $[a, b]$  pelo que

$$f'(c) = 0, \quad \forall c \in ]a, b[.$$

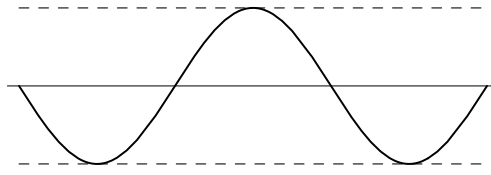


FIGURA 14. Versão geométrica do Teorema de Rolle.

Se  $M > m$ , então a hipótese  $f(a) = f(b)$  implica que pelo menos um dos valores  $M$  ou  $m$  seja assumido por  $f$  num ponto  $c \in ]a, b[$ . Temos então que  $f$  tem um extremo nesse ponto  $c$ . Como  $f$  é por hipótese diferenciável, podemos usar o Teorema 14.6 para concluir que então  $f'(c) = 0$ .  $\square$

**Corolário 15.2.** *Entre dois zeros de uma função diferenciável, existe sempre pelo menos um zero da sua derivada*

*Dem.* Basta aplicar o Teorema 15.1 a uma função  $f$ , contínua em  $[a, b]$  e diferenciável em  $]a, b[$ , tal que  $f(a) = 0 = f(b)$ .  $\square$

**Corolário 15.3.** *Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função diferenciável, não pode existir mais do que um zero da própria função.*

*Dem.* Redução ao absurdo + Corolário 15.2. Exercício.  $\square$

### Teorema de Lagrange.

**Teorema 15.4.** (Teorema de Lagrange) *Seja  $f$  uma função definida e contínua num intervalo limitado e fechado  $[a, b]$ , e diferenciável em  $]a, b[$ . Então, existe pelo menos um ponto  $c \in ]a, b[$  tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Nota 15.5.** O Teorema de Rolle é o caso particular do Teorema de Lagrange que se obtém quando  $f(a) = f(b)$ .

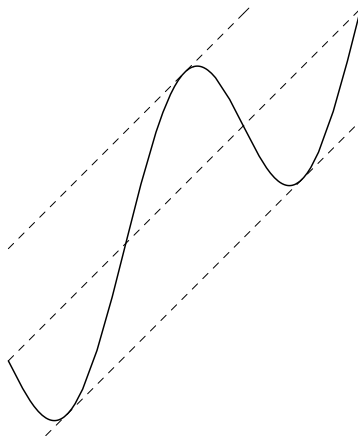


FIGURA 15. Versão geométrica do Teorema de Lagrange.

*Dem.* Seja

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \in \mathbb{R}.$$

Temos assim que

$$f(b) - f(a) = \lambda(b - a) \Rightarrow f(b) - \lambda b = f(a) - \lambda a.$$

Consideremos a função  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x) = f(x) - \lambda x, \quad \forall x \in [a, b].$$

Como

$$f(b) - \lambda b = f(a) - \lambda a \Rightarrow g(b) = g(a)$$

e  $g$  é contínua em  $[a, b]$  e diferenciável em  $]a, b[$ , podemos aplicar o Teorema de Rolle para concluir que existe  $c \in ]a, b[$  tal que

$$g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \lambda = 0 \Rightarrow f'(c) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

### Exemplos de Aplicação do Teorema de Lagrange.

**Corolário 15.6.** *Se  $f$  é uma função nas condições do Teorema de Lagrange, então:*

- (i)  $f'(x) = 0, \forall x \in ]a, b[ \Rightarrow f$  é constante em  $[a, b]$ ;
- (ii)  $f'(x) > 0, \forall x \in ]a, b[ \Rightarrow f$  é estritamente crescente em  $[a, b]$ ;
- (iii)  $f'(x) < 0, \forall x \in ]a, b[ \Rightarrow f$  é estritamente decrescente em  $[a, b]$ .

*Dem.* Sejam  $x_1, x_2 \in [a, b]$  com  $x_1 < x_2$ . Então, pelo Teorema de Lagrange, existe  $c \in ]x_1, x_2[$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = \begin{cases} 0, & \text{se } f'(c) = 0; \\ > 0, & \text{se } f'(c) > 0; \\ < 0, & \text{se } f'(c) < 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\text{a função } f \text{ é } \begin{cases} \text{constante,} & \text{se } f'(c) = 0; \\ \text{crescente,} & \text{se } f'(c) > 0; \\ \text{decrescente,} & \text{se } f'(c) < 0. \end{cases}$$

□

**Exemplo 15.7.** Consideremos a função  $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^3 - x$  que já considerámos anteriormente no Exemplo 14.9. Vimos então que  $f'(x) = 3x^2 - 1$  tem dois zeros (pontos críticos) em  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Temos que:

- $f'(x) > 0$  no intervalo  $(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ , logo a função é crescente neste intervalo;
- $f'(x) < 0$  no intervalo  $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ , logo a função é decrescente neste intervalo;
- $f'(x) > 0$  no intervalo  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 2)$ , logo a função é crescente neste intervalo;

Estes intervalos de monotonia mostram que  $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  é um máximo local e  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  é um mínimo local de  $f$ .

**Corolário 15.8.** *Seja  $f$  uma função nas condições do Teorema de Lagrange. Então, se existir o  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ , também existirá a derivada lateral  $f'_d(a)$  e*

$$f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x).$$

*Analogamente, se existir o  $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$ , também existirá a derivada lateral  $f'_e(b)$  e*

$$f'_e(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x).$$

*Dem.* Para cada  $x \in ]a, b[$ , sabemos pelo Teorema de Lagrange que existe um  $\xi = \xi(x) \in ]a, x[$  tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Como

$$a < \xi = \xi(x) < x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \xi(x) = a^+,$$

podemos usar o Teorema 8.3, relativo ao limite de funções compostas, para concluir que

$$f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\xi \rightarrow a^+} f'(\xi).$$

□

**Exemplo 15.9.** (Ficha 3, I 3.(b)) Pretende-se determinar os pontos  $x \in \mathbb{R}$  onde a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = |x| e^{-x^2/2}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

é diferenciável, bem como calcular a sua derivada nesses pontos.

Para  $x > 0$  a função  $f$  é definida por  $f(x) = x e^{-x^2/2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ , pelo que é claramente diferenciável com derivada dada por

$$f'(x) = (x e^{-x^2/2})' = 1 \cdot e^{-x^2/2} + x \cdot ((-x) e^{-x^2/2}) = (1 - x^2) e^{-x^2/2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Para  $x < 0$  a função  $f$  é definida por  $f(x) = -x e^{-x^2/2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^-$ , pelo que também é claramente diferenciável com derivada dada por

$$f'(x) = (-x e^{-x^2/2})' = (-1) \cdot e^{-x^2/2} + (-x) \cdot ((-x) e^{-x^2/2}) = (-1 + x^2) e^{-x^2/2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^-.$$

Para  $x = 0$ , podemos usar o Corolário 15.8 do Teorema de Lagrange para calcular as derivadas laterais de  $f$ :

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x^2) e^{-x^2/2} = 1 \quad e$$

$$f'_e(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1 + x^2) e^{-x^2/2} = -1.$$

Como  $f'_d(0) = 1 \neq -1 = f'_e(0)$ , concluímos que  $f$  não é diferenciável no ponto zero.

## 16. AULA – 28 DE OUTUBRO DE 2010

### Teorema de Cauchy.

**Teorema 16.1.** (Teorema de Cauchy) *Sejam  $f$  e  $g$  funções definidas e contínuas num intervalo limitado e fechado  $[a, b]$ , e diferenciáveis em  $]a, b[$ . Então, se  $g'(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in ]a, b[$ , existe pelo menos um ponto  $c \in ]a, b[$  tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

**Nota 16.2.** O Teorema de Lagrange é o caso particular do Teorema de Cauchy que se obtém quando  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $g(x) = x$ ,  $\forall x \in [a, b]$ .

*Dem.* Sabemos pelo Teorema de Rolle que

$$g'(x) \neq 0, \quad \forall x \in ]a, b[ \Rightarrow g(a) \neq g(b).$$

Seja então

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \in \mathbb{R},$$

e consideremos a função  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda g(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Temos então que  $\varphi(a) = \varphi(b)$  (verifiquem que de facto assim é), e  $\varphi$  é contínua em  $[a, b]$  e diferenciável em  $]a, b[$ . Podemos portanto aplicar o Teorema de Rolle para concluir que existe  $c \in ]a, b[$  tal que

$$\varphi'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \lambda g'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

□

### Regra de Cauchy ou de L'Hôpital.

**Teorema 16.3.** (Regra de Cauchy – primeira versão) *Sejam  $f$  e  $g$  funções definidas e diferenciáveis num intervalo aberto  $]a, b[$ . Suponhamos também que:*

- (i)  $g'(x) \neq 0, \forall x \in ]a, b[$ ;
- (ii)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x).$$

Então,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existe em } \overline{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existe em } \overline{\mathbb{R}}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Nota 16.4.** As versões análogas deste teorema para os limites

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{i.e. } a = -\infty), \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{i.e. } b = +\infty),$$

também são válidas e serão usadas na sequência.

*Dem.* Faremos apenas o caso em que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$ . Podemos então prolongar  $f$  e  $g$  por continuidade ao ponto  $a \in \mathbb{R}$ , fazendo  $f(a) = 0 = g(a)$ , e usar o Teorema de Cauchy para mostrar que, para cada  $x \in ]a, b[$ , existe um  $\xi = \xi(x) \in ]a, x[$  tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Como  $x \rightarrow a^+ \Rightarrow \xi \rightarrow a^+$ , podemos então concluir que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

□

**Corolário 16.5.** (Regra de Cauchy – segunda versão) *Sejam  $I$  um intervalo aberto,  $a \in I$  um ponto desse intervalo (ou  $a = -\infty$  se  $I = ]-\infty, c[$ , ou  $a = +\infty$  se  $I = ]c, +\infty[$ , com  $c \in \mathbb{R}$ ),  $f$  e  $g$  funções definidas e diferenciáveis em  $I \setminus \{a\}$ , com  $g'(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{a\}$ . Suponhamos que*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Então,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sempre que o limite da direita existir em  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Temos assim que a Regra de Cauchy é um método para

resolver indeterminações do tipo  $\frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$  em limites de funções diferenciáveis.

**Exemplos de Aplicação da Regra de Cauchy.****Exemplo 16.6.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{RC}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1.$$

**Exemplo 16.7.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{RC}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Tem-se então que

$$(25) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

**Exemplo 16.8.**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log(x) = 0^+ \cdot (-\infty) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty} \stackrel{\text{RC}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Tem-se então que

$$(26) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log(x) = 0.$$

**Exemplo 16.9.** O cálculo seguinte ilustra mais uma aplicação simples da Regra de Cauchy:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} \stackrel{\text{RC}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

De facto, combinando este tipo de cálculo com o Método de Indução Matemática, obtém-se facilmente que:

$$(27) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Exemplo 16.10.** (Ficha 2, V 1.(h)) Pretende-se calcular o seguinte limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}.$$

Uma primeira tentativa poderia ser a seguinte:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \frac{e^{-\infty}}{0} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{RC}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{0}{0} = \dots$$

Uma segunda abordagem, com melhores resultados, poderia ser a seguinte:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{+\infty}{+\infty} \stackrel{\text{RC}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0.$$

De facto, e tendo em conta o resultado (27) do Exemplo 16.9, a melhor abordagem seria neste caso a seguinte:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0,$$

onde se fez a mudança de variável  $y = 1/x$ , em que  $x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow y \rightarrow +\infty$ .

**Exemplo 16.11.** Pretende-se calcular o seguinte limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\text{sen}(x)} = 0^0 = \text{indeterminação}.$$

Tendo em conta que

$$x^{\text{sen}(x)} = e^{\log(x^{\text{sen}(x)})} = e^{\text{sen}(x) \cdot \log(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\text{sen}(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sen}(x) \cdot \log(x)},$$

podemos determinar o valor do limite inicial calculando o seguinte limite auxiliar (Ficha 2, V 1.(j)):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen}(x) \cdot \log(x) &= 0 \cdot (-\infty) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x)}{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}} = \frac{-\infty}{+\infty} \stackrel{\text{RC}}{=} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x \cdot \cos(x)} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = -1 \cdot \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

Temos assim que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen}(x) \cdot \log(x)} = e^0 = 1.$$

**Nota 16.12.** O método do exemplo anterior, que permitiu resolver uma indeterminação do tipo  $0^0$ , também pode ser usado para resolver indeterminações do tipo  $\infty^0$  e  $1^\infty$ .

**Exemplo 16.13.** (Ficha 2, V 2.(m)) Pretende-se calcular o seguinte limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{1/x^2} = 1^\infty = \text{indeterminação.}$$

Tendo em conta que, para qualquer  $x \in ]-\pi/2, \pi/2[$ ,

$$(\cos(x))^{1/x^2} = e^{\log((\cos(x))^{1/x^2})} = e^{\frac{\log(\cos(x))}{x^2}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{1/x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2}},$$

podemos determinar o valor do limite inicial calculando o seguinte limite auxiliar :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{RC}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \frac{1}{2 \cos(x)} = -1 \cdot \frac{1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}.$$

Temos assim que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{1/x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2}} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

## 17. AULA – 02 DE NOVEMBRO DE 2010

### Derivadas de Ordem Superior à Primeira.

**Definição 17.1.** Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável no intervalo  $I = ]a, b[$ . Se a função derivada  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$  for diferenciável, a sua derivada  $(f')'$  é designada por *segunda derivada de  $f$*  e representa-se por

$$f'' \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} \quad \text{ou} \quad f^{(2)}.$$

Mais geralmente, a  $n$ -ésima derivada de  $f$  define-se, por recorrência, como a derivada da  $(n-1)$ -ésima derivada de  $f$ , quando esta existir:

$$f^{(n)} = \left( f^{(n-1)} \right)' \quad \text{ou} \quad \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right).$$

**Definição 17.2.** Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida no intervalo  $I = ]a, b[$ . Se existir a  $n$ -ésima derivada de  $f$  em todo o intervalo  $I$ , e  $f^{(n)} : I \rightarrow \mathbb{R}$  for uma função contínua, diremos que  $f$  é uma *função de classe  $C^n(I)$* , ou que  $f \in C^n(I)$ . Diremos ainda que  $f$  é uma função de classe  $C^0(I)$  se  $f$  for contínua em  $I$ , e que  $f$  é uma função de classe  $C^\infty(I)$  se  $f \in C^n(I)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo 17.3.** Consideremos a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = x^2 \cdot H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0; \\ x^2, & \text{se } x \geq 0. \end{cases} \quad (H \text{ representa a função de Heaviside – Exemplo 6.1.})$$

Esta função é diferenciável em todo o  $\mathbb{R}$ , com derivada  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f'(x) = 2x \cdot H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0; \\ 2x, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Esta derivada  $f'$  é por sua vez contínua em todo o  $\mathbb{R}$ , mas diferenciável apenas em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , com  $f'' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f''(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0; \\ 2, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Como  $f'_e(0) = 0 \neq 2 = f''_d(0)$ , não existe de facto segunda derivada de  $f$  no ponto zero.

Assim, temos que  $f \in C^1(\mathbb{R})$  mas  $f \notin C^2(\mathbb{R})$ .

**Exemplo 17.4.** Consideremos a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x), & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Esta função é claramente diferenciável para  $x \neq 0$ , com derivada dada por

$$f'(x) = (x^2 \cos(1/x))' = 2x \cdot \cos(1/x) + x^2 \cdot ((-1/x^2)(-\sin(1/x))) = 2x \cos(1/x) + \sin(1/x), \quad \forall x \neq 0.$$

Pelo Princípio do Encaixe (Teorema 8.1) tal como já tinha sido feito no Exemplo 7.4, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos(1/x) = (\text{infinitésimo}) \times (\text{função limitada}) = 0.$$

Assim, vemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x \cos(1/x) + \sin(1/x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x) = \text{não existe (cf. Exemplo 7.3)},$$

pelo que neste caso não é possível recorrer ao Corolário 15.8.

De facto, a função  $f$  é diferenciável no ponto zero com derivada  $f'(0) = 0$ , como se pode verificar usando a definição de derivada de uma função num ponto:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(1/x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos(1/x) = 0.$$

Temos assim que  $f$  é uma função diferenciável em todo o  $\mathbb{R}$ , com derivada  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos(1/x) + \sin(1/x), & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Por outro lado, como o  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  não existe, esta função  $f'$  não é contínua no ponto zero.

Temos então que  $f \in C^0(\mathbb{R})$ , existe  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , mas  $f' \notin C^0(\mathbb{R})$  pelo que  $f \notin C^1(\mathbb{R})$ .

**Exemplo 17.5.** A função exponencial  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = e^x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , é uma função de classe  $C^\infty(\mathbb{R})$ . Para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ , a  $n$ -ésima derivada de  $f$  existe e é contínua em todo o  $\mathbb{R}$ :

$$f^{(n)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por } f^{(n)}(x) = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Segunda Derivada e Extremos Locais.** A segunda derivada fornece-nos um teste simples para verificar se um ponto crítico é um máximo ou mínimo local:

**Teorema 17.6.** *Seja  $f$  uma função de classe  $C^2(]a, b[)$  e  $c \in ]a, b[$  um ponto crítico de  $f$ . Então,*

- (i)  $f''(c) > 0 \Rightarrow f$  tem um mínimo local em  $c$ ;
- (ii)  $f''(c) < 0 \Rightarrow f$  tem um máximo local em  $c$ .

**Nota 17.7.** Quando  $f''(c) = 0$ , e tendo apenas essa informação, nada se pode concluir sobre a natureza do ponto crítico  $c$ .

*Dem.*

(i) Temos por hipótese que  $f''$  é uma função contínua, com  $f''(c) > 0$ . Pelo Corolário 9.10, sabemos então que

$$\text{existe } \delta > 0 \text{ tal que } f''(x) > 0 \text{ para todo o } x \in ]c - \delta, c + \delta[.$$

Podemos agora usar o Corolário 15.6 do Teorema de Lagrange para concluir que

$$\text{a função } f' \text{ é estritamente crescente no intervalo } ]c - \delta, c + \delta[.$$

Como por hipótese  $c$  é um ponto crítico de  $f$ , sabemos que  $f'(c) = 0$  pelo que

$$f'(x) < 0 \text{ para } x \in ]c - \delta, c[ \quad \text{e} \quad f'(x) > 0 \text{ para } x \in ]c, c + \delta[.$$

Usando novamente o Corolário 15.6 do Teorema de Lagrange, podemos finalmente concluir que

$$f \text{ é decrescente em } ]c - \delta, \delta[ \text{ e } f \text{ é crescente em } ]c, c + \delta[,$$

pelo que  $f$  tem, de facto, um mínimo local no ponto  $c \in ]a, b[$ .

(ii) Exactamente análogo a (i). □

**Exemplo 17.8.** Voltemos ao exemplo da função  $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^3 - x$  que já considerámos anteriormente. Vimos que os pontos críticos de  $f$  eram  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Como  $f''(x) = 6x$ , temos que:

$$f''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0, \quad f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0,$$

logo  $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  é um máximo local e  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  é um mínimo local. Esta mesma informação tinha sido obtida anteriormente analisando o sinal da primeira derivada.

### Concavidades e Inflexões.

**Definição 17.9.** Seja  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável num ponto  $c \in ]a, b[$ . Diremos que  $f$  é *convexa* em  $c$  (resp. *côncava* em  $c$ ), ou que  $f$  tem a *concavidade voltada para cima* em  $c$  (resp. *concavidade voltada para baixo* em  $c$ ), se o gráfico de  $f$  estiver *localmente* (i.e. numa vizinhança de  $c$ ) por *cima* (resp. *baixo*) da *recta tangente* ao gráfico de  $f$  no ponto  $c$ . Ou seja,  $f$  é *convexa* em  $c$  (resp. *côncava* em  $c$ ) se existir  $\delta > 0$  tal que

$$f(x) - f(c) \geq f'(c) \cdot (x - c), \text{ para todo o } x \in ]c - \delta, c + \delta[ \\ \text{(resp. } f(x) - f(c) \leq f'(c) \cdot (x - c), \text{ para todo o } x \in ]c - \delta, c + \delta[).$$

Diremos que  $f$  tem um *ponto de inflexão* em  $c$  se existir  $\delta > 0$  tal que,  $f$  é convexa num dos intervalos  $]c - \delta, c[$  ou  $]c, c + \delta[$  e côncava no outro.

**Teorema 17.10.** *Sejam  $f \in C^2(]a, b[)$  e  $c \in ]a, b[$ . Então:*

- (i)  $f''(c) > 0 \Rightarrow f$  é convexa em  $c$ ;
- (ii)  $f''(c) < 0 \Rightarrow f$  é côncava em  $c$ ;
- (iii)  $f''(c) = 0$  e  $f''$  muda de sinal em  $c \Rightarrow f$  tem um ponto de inflexão em  $c$ .

*Dem.* Consideremos a função auxiliar  $g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$g(x) = (f(x) - f(c)) - f'(c) \cdot (x - c), \quad \forall x \in ]a, b[.$$

Tendo em conta a Definição 17.9, temos que estudar o sinal desta função auxiliar  $g$  numa vizinhança de  $c \in ]a, b[$ .

Observemos primeiro que:

$$g(c) = 0; \quad g'(x) = f'(x) - f'(c) \Rightarrow g'(c) = 0; \quad g''(x) = f''(x) \Rightarrow g''(c) = f''(c).$$

Tendo em conta o Teorema 17.6, podemos então concluir que:

- (i)  $(f''(c) > 0) \Rightarrow (g''(c) > 0) \Rightarrow (g \text{ tem um mínimo local em } c) \Rightarrow (g(x) \geq g(c) = 0 \text{ numa vizinhança de } c) \Rightarrow (f \text{ é convexa em } c)$ ;
- (ii)  $(f''(c) < 0) \Rightarrow (g''(c) < 0) \Rightarrow (g \text{ tem um máximo local em } c) \Rightarrow (g(x) \leq g(c) = 0 \text{ numa vizinhança de } c) \Rightarrow (f \text{ é côncava em } c)$ ;
- (iii)  $(f'' \text{ muda de sinal em } c) \Rightarrow (f \text{ muda de convexidade em } c)$ .

□

## 18. AULA – 04 DE NOVEMBRO DE 2010

### Assíntotas ao Gráfico de Uma Função.

**Definição 18.1.** (Assíntotas Verticais) Sejam  $I$  um intervalo,  $a \in I$  e  $f$  uma função definida em  $I \setminus \{a\}$ . Diremos que a recta vertical de equação  $x = a$  é uma *assíntota vertical* ao gráfico de  $f$  se

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty \quad (\text{qualquer uma das 4 combinações de sinais serve}).$$

**Definição 18.2.** (Assíptotas Oblíquas) Seja  $f$  uma função definida num intervalo da forma  $]-\infty, a[$  (resp.  $]a, +\infty[$ ), com  $a \in \mathbb{R}$ . Diremos que a recta de equação

$$y = m \cdot x + p, \quad m, p \in \mathbb{R},$$

é uma *assíptota à esquerda* ao gráfico de  $f$  (resp. *assíptota à direita* ao gráfico de  $f$ ) se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (m \cdot x + p)) = 0$$

(resp.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (m \cdot x + p)) = 0$ ).

No caso particular em que  $m = 0$ , diremos que o gráfico de  $f$  tem uma *assíptota horizontal à esquerda* (resp. *assíptota horizontal à direita*).

**Teorema 18.3.** *Seja  $f$  uma função definida num intervalo da forma  $]-\infty, a[$  (resp.  $]a, +\infty[$ ), com  $a \in \mathbb{R}$ . O gráfico de  $f$  tem uma assíptota à esquerda (resp. direita) se e só se existirem e forem finitos os limites:*

$$(a) \quad m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad (b) \quad p = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m \cdot x)$$

(resp. (a)  $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  (b)  $p = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - m \cdot x)$ ).

Nesse caso, a assíptota à esquerda (resp. direita) é única e tem equação

$$y = m \cdot x + p.$$

*Dem.* Faremos apenas o caso da assíptota à esquerda, sendo o da assíptota à direita completamente análogo.

( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que a recta de equação  $y = mx + p$ ,  $m, p \in \mathbb{R}$ , é uma assíptota à esquerda ao gráfico de  $f$ . Então

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (m \cdot x + p)) = 0,$$

pelo que a função auxiliar  $\varphi$ , definida por

$$\varphi(x) = (f(x) - (m \cdot x + p)), \quad \text{satisfaz} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0.$$

Temos então que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{mx + p + \varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( m + \frac{p}{x} + \frac{\varphi(x)}{x} \right) = m \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (p + \varphi(x)) = p \in \mathbb{R},$$

pelo que os dois limites em causa existem e são finitos.

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos agora que existem e são finitos os limites referidos em (a) e (b), com valores  $m, p \in \mathbb{R}$ . Temos então que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (m \cdot x + p)) = 0,$$

pelo que a recta de equação  $y = mx + p$  é uma assíptota à esquerda ao gráfico de  $f$ .  $\square$

### Exemplo de traçado do gráfico de uma função.

**Exemplo 18.4.** (Ficha 2, parte 2, I 1.(g)) Pretende-se determinar intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assíptotas da função  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = x \cdot e^{1/x}, \quad \forall x \neq 0,$$

bem como esboçar o seu gráfico.

A função  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , com derivada  $f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f'(x) = e^{1/x} \left( 1 - \frac{1}{x} \right), \quad \forall x \neq 0.$$

Temos então que

$$f'(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[; \\ = 0, & \text{se } x = 1; \\ < 0, & \text{se } x \in ]0, 1[; \end{cases}$$

logo concluímos que

$$f \text{ é } \begin{cases} \text{crescente,} & \text{em } ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[; \\ \text{decrecente,} & \text{em } ]0, 1[. \end{cases}$$

Podemos também já concluir que  $f$  tem um mínimo local em  $x = 1$ .

A derivada  $f'$  é também diferenciável em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , com derivada  $f'' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f''(x) = \frac{e^{1/x}}{x^3}, \quad \forall x \neq 0.$$

Temos então que

$$f''(x) = \begin{cases} < 0, & \text{se } x \in ]-\infty, 0[; \\ > 0, & \text{se } x \in ]0, +\infty[; \end{cases} \Rightarrow f \text{ é } \begin{cases} \text{côncava,} & \text{em } ]-\infty, 0[; \\ \text{convexa,} & \text{em } ]0, +\infty[. \end{cases}$$

Podemos também já concluir que  $f$  não tem pontos de inflexão (notem que  $f$  não está sequer definida no ponto zero).

O único ponto onde  $f$  pode ter uma assíntota vertical é o ponto zero. Temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot e^{1/x} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0,$$

enquanto que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \frac{+\infty}{+\infty} \stackrel{\text{RC}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty.$$

O resultado deste segundo limite diz-nos que a recta vertical de equação  $x = 0$  é de facto uma assíntota vertical ao gráfico de  $f$ .

Como

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1 = m \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x \cdot e^{1/x} - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \frac{e^y - 1}{y} = 1 = p \in \mathbb{R}$$

(onde se fez a mudança de variável  $y = 1/x$ , em que  $x \rightarrow \pm\infty \Leftrightarrow y \rightarrow 0^\pm$ ), temos que a recta de equação  $y = x + 1$  é uma assíntota ao gráfico de  $f$ , tanto à direita como à esquerda.

A Figura 16 apresenta o esboço do gráfico de  $f$ .

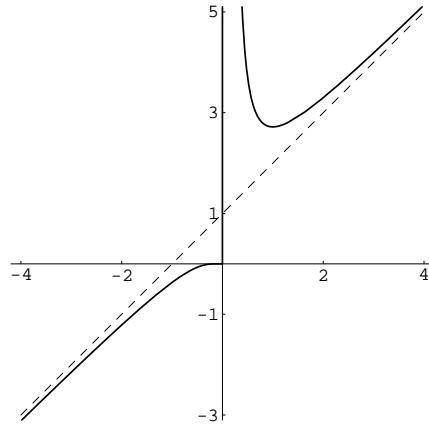
### Funções Injectivas e suas Inversas.

**Definição 18.5.** Uma função  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se *injectiva* se para qualquer valor do contra-domínio  $y \in f(D)$  existir um só ponto do domínio  $x \in D$  tal que  $f(x) = y$ . De forma equivalente,  $f$  é injectiva se

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in D.$$

**Exercício 18.6.** Mostre que qualquer função estritamente monótona é injectiva.

**Nota 18.7.** Há funções injectivas que *não são* estritamente monótonas, e mesmo uma função injectiva e contínua pode não ser estritamente monótona (dêem um exemplo!). No entanto, toda a função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e injectiva num intervalo  $I$  é monótona e  $f(I)$  é um intervalo (demonstrem este facto ou vejam no Spivak).

FIGURA 16. Esboço do gráfico da função  $f$  do Exemplo 18.4.

**Definição 18.8.** Seja  $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow f(D_f) \subset \mathbb{R}$  uma função injectiva. A sua função *inversa* é definida como a função

$$\begin{aligned} f^{-1} : f(D_f) \subset \mathbb{R} &\longrightarrow D_f \subset \mathbb{R} \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = x, \end{aligned}$$

onde  $x \in D_f$  é o único ponto do domínio de  $f$  tal que  $f(x) = y$ .

Notem que  $D_{f^{-1}} \stackrel{\text{def}}{=} f(D_f)$ . Temos assim que

$$\begin{array}{lcl} D_f & \xrightarrow{f} & f(D_f) = D_{f^{-1}} \\ x & \longmapsto & f(x) = y \end{array} = \begin{array}{lcl} D_{f^{-1}} & \xrightarrow{f^{-1}} & f^{-1}(D_{f^{-1}}) = D_f \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) = x \end{array}$$

e portanto

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in D_f = f^{-1}(D_{f^{-1}}) \quad \text{e} \quad f(f^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in D_{f^{-1}} = f(D_f).$$

Notem, ainda, que existe uma relação muito simples entre o gráfico de uma função  $f$  e o gráfico da sua inversa  $f^{-1}$ : se  $(x, f(x))$  é um ponto do gráfico de  $f$  então  $(f(x), x)$  é um ponto do gráfico de  $f^{-1}$ . Isto quer dizer que os gráficos de  $f$  e de  $f^{-1}$  são **simétricos** em relação à recta diagonal  $y = x$ , como se ilustra nos exemplos seguintes.

**Exemplo 18.9.** A função polinomial  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $p(x) = x^2$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , não é injectiva em todo o seu domínio  $\mathbb{R}$  porque

$$p(x) = x^2 = (-x)^2 = p(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

No entanto, como a sua restrição ao intervalo  $[0, +\infty[$  é estritamente crescente, temos que a função

$$\begin{aligned} f = p|_{\mathbb{R}_0^+} : \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow p(\mathbb{R}_0^+) = \mathbb{R}_0^+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

é injectiva. Tem assim inversa  $f^{-1}$  definida em  $\mathbb{R}_0^+$ , que é naturalmente a função raiz quadrada:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Os gráficos destas duas funções estão representados na Figura 17.

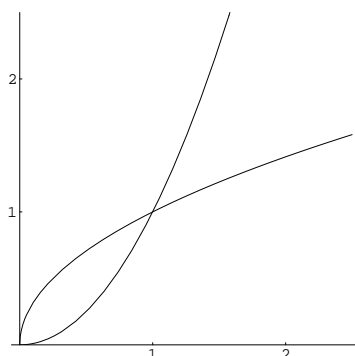


FIGURA 17. Gráfico da função  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  definida por  $f(x) = x^2$ , e da sua inversa  $f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  definida por  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ .

### 19. AULA – 08 DE NOVEMBRO DE 2010

**Funções Injectivas e suas Inversas (cont.)** Vimos na última aula que dada uma função injectiva  $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow f(D_f) \subset \mathbb{R}$ , define-se a sua função inversa  $f^{-1} : f(D_f) \subset \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{array}{lcl} D_f & \xrightarrow{f} & f(D_f) = D_{f^{-1}} \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(D_{f^{-1}}) = D_f \\ x & \mapsto & f(x) = y \mapsto f^{-1}(y) = x \end{array}$$

e portanto

$$f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in D_f = f^{-1}(D_{f^{-1}}) \quad \text{e} \quad f(f^{-1}(y)) = y, \forall y \in D_{f^{-1}} = f(D_f).$$

**Exemplo 19.1.** A função polinomial  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^3$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , é estritamente crescente em todo o seu domínio  $\mathbb{R}$  e o seu contradomínio é  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Tem assim inversa  $f^{-1}$  definida em todo o  $\mathbb{R}$ , que é naturalmente a função raiz cúbica:

$$\begin{array}{l} f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt[3]{x} \end{array}$$

Os gráficos destas duas funções estão representados na Figura 18.

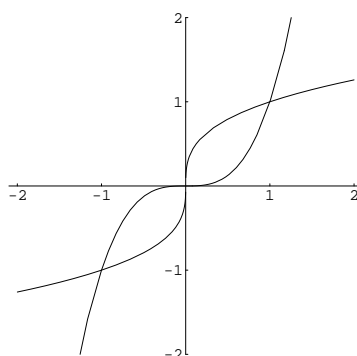


FIGURA 18. Gráfico da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^3$ , e da sua inversa  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ .

**Exemplo 19.2.** Os Exemplos 18.9 e 19.1 podem ser generalizados da seguinte forma. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , temos que a função polinomial

$$f(x) = x^n \quad \text{é injetiva em} \quad \begin{cases} [0, +\infty[ , & \text{se } n \text{ é par,} \\ \mathbb{R} , & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

pelo que a função inversa

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} \quad \text{tem domínio} \quad \begin{cases} f([0, +\infty[) = [0, +\infty[ , & \text{se } n \text{ é par,} \\ f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} , & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

**Continuidade e Derivada de Funções Inversas.** Vamos agora estudar que propriedades de uma função injetiva  $f$  são herdadas pela sua inversa  $f^{-1}$ .

**Teorema 19.3.** *Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e injetiva num intervalo  $I$ . Então a função inversa  $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$  é contínua.*

*Dem.* Consultem o Spivak. □

**Nota 19.4.** Notem que, nas condições do Teorema 19.3, se  $f$  é crescente (resp. decrescente) então  $f^{-1}$  é crescente (resp. decrescente).

**Teorema 19.5.** *Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e injetiva num intervalo  $I$ , e seja  $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$  a sua inversa. Se  $f$  é diferenciável num ponto  $a \in I$  e  $f'(a) \neq 0$ , então  $f^{-1}$  é diferenciável no ponto  $b = f(a)$  e*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

*Dem.* Assumiremos que  $f$  é diferenciável em todo o intervalo  $I$ . Provaremos apenas que se  $f^{-1}$  é diferenciável em  $f(I)$ , o valor da sua derivada é, de facto, o especificado no enunciado do teorema.

Usando a definição de função inversa e o Teorema 14.1, temos que

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(x) = x &\Rightarrow (f^{-1} \circ f)'(x) = (x)' \\ &\Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \\ &\Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}, \quad \forall x \in I. \end{aligned}$$

Fazendo  $x = a$  e  $b = f(a)$ , obtemos assim o resultado pretendido. □

### Exemplos.

**Exemplo 19.6.** Consideremos a função  $f(x) = x^n$  e a sua inversa  $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$  que estão definidas em  $\mathbb{R}$ , para  $n$  ímpar, e em  $[0, +\infty]$  para  $n$  par. Concluímos do Teorema 19.3, que a raiz- $n$  é uma função contínua em todo o seu domínio. Por outro lado, temos que (Exercício 12.8):

$$f'(x) = nx^{n-1} \neq 0, \quad \text{se } x \neq 0.$$

Segue-se do Teorema 19.5 que  $f^{-1}$  é diferenciável para  $y \neq 0$  e que a sua derivada é dada por:

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{n(y^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}. \end{aligned}$$

**Nota 19.7.** Temos então que

$$(x^a)' = ax^{a-1},$$

se  $a$  é um inteiro ou se  $a$  é da forma  $\frac{1}{n}$ . Segue-se que esta fórmula é válida para qualquer  $a = \frac{n}{m}$  racional. Veremos mais adiante que esta fórmula é de facto válida para qualquer expoente  $a \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}^+$  (como já tinha sido afirmado no Exemplo 12.9).

**Exemplo 19.8.** As funções trigonométricas seno e cosseno, apresentadas no Exemplo 5.4, são periódicas pelo que não são certamente injectivas em todo o seu domínio. De facto, para cada valor  $y$  do seu contradomínio  $[-1, 1]$  há uma infinidade de pontos do domínio  $\mathbb{R}$  que lhe correspondem. Por exemplo,

$$\operatorname{sen}(k\pi) = 0 = \cos(k\pi + \frac{\pi}{2}), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, e para que possamos definir as funções inversas destas funções trigonométricas, temos que restringir os seus domínios a intervalos onde sejam injectivas.

No caso da função seno, consideramos a sua restrição ao intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$ . A função seno é estritamente crescente neste intervalo, logo injectiva, e  $\operatorname{sen}([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$ . A sua inversa neste intervalo é a chamada função *arco seno*:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^{-1} = \operatorname{arcsen} : [-1, 1] &\longrightarrow [-\pi/2, \pi/2] \\ x &\longmapsto \operatorname{arcsen}(x) \end{aligned}$$

O seu gráfico está representado na Figura 19.

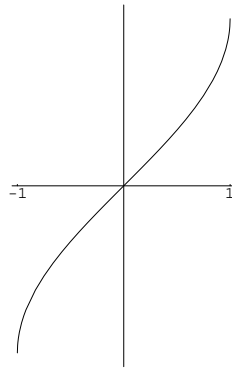


FIGURA 19. Gráfico da função trigonométrica inversa arco seno.

Como a função  $\operatorname{sen}$  é contínua, concluímos do Teorema 19.3 que a função  $\operatorname{arcsen}$  é contínua. Como  $\operatorname{sen}$  é diferenciável e

$$(\operatorname{sen})'(x) = \cos(x) \neq 0, \quad \forall x \in ]-\pi/2, \pi/2[ ,$$

temos pelo Teorema 19.5 que a função arco seno é diferenciável em qualquer ponto  $x \in ]-1, 1[$ . Para calcular a sua derivada observamos que

$$(\operatorname{arcsen})'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen}(x))}, \quad \forall x \in ]-1, 1[ .$$

Como

$$\cos(\operatorname{arcsen}(x)) = \sqrt{1-x^2}, \quad \forall x \in [-1, 1] \quad (\text{exercício}),$$

concluímos que:

$$(28) \quad (\operatorname{arcsen})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in ]-1, 1[ .$$

**Exercício 19.9.** Verifique que a restrição da função cosseno ao intervalo  $[0, \pi]$  é estritamente decrescente, logo injectiva, e que  $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$ . A sua inversa neste intervalo é a chamada função *arco cosseno*  $\cos^{-1} = \operatorname{arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ . Mostre que  $\operatorname{arccos}$  é diferenciável em  $] - 1, 1[$  com derivada dada por:

$$(29) \quad (\operatorname{arccos})'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in ]-1, 1[ .$$

**Exemplo 19.10.** A função trigonométrica tangente, apresentada no Exemplo 5.5, também é periódica pelo que não é injectiva em todo o seu domínio. A sua restrição ao intervalo  $]-\pi/2, \pi/2[$  é estritamente crescente, logo injectiva, e  $\tan(]-\pi/2, \pi/2]) = \mathbb{R}$ . A sua inversa neste intervalo é a chamada função *arco tangente*:

$$\begin{aligned} \tan^{-1} = \arctan : \mathbb{R} &\longrightarrow ]-\pi/2, \pi/2[ \\ x &\longmapsto \arctan(x) \end{aligned}$$

O seu gráfico está representado na Figura 20. Como a tangente é uma função contínua, a função

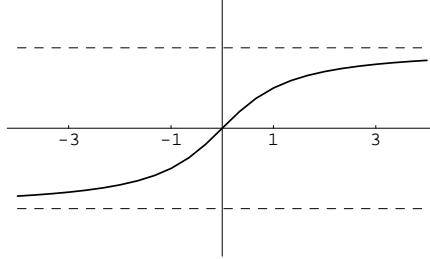


FIGURA 20. Gráfico da função trigonométrica inversa arco tangente.

arco tangente também é uma função contínua. Por outro lado, pela fórmula (23) para a derivada da tangente, temos que

$$f'(x) = (\tan)'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \neq 0, \quad \forall x \in ]-\pi/2, \pi/2[.$$

Podemos então aplicar o Teorema 19.5 para concluir que a função arco tangente é diferenciável em qualquer ponto  $x \in \mathbb{R}$  e

$$(\arctan)'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \cos^2(\arctan(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{exercício}),$$

temos então que

$$(30) \quad (\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 19.11.** A função exponencial é estritamente crescente, e portanto injectiva, em todo o seu domínio  $\mathbb{R}$ , com contradomínio  $\mathbb{R}^+$ . A sua inversa é a função *logaritmo* já nossa conhecida  $\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  (ver Exemplo 5.3). Como a função exponencial é contínua, a função logaritmo também é contínua. Como

$$f'(x) = (e^x)' = e^x \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

temos pelo Teorema 19.5 que a função logaritmo é diferenciável em qualquer ponto  $x \in \mathbb{R}^+$  e

$$f^{-1}(x) = \log(x) \Rightarrow (\log)'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Como a derivada da função exponencial  $f$  é a própria função exponencial  $f$ , temos então que

$$(31) \quad (\log)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f(f^{-1}(x))} = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

**Exercício 19.12.** (Ficha 2, parte 2, II 1.) Considere a função seno hiperbólico definida no Exemplo 5.6. Mostre que a sua função inversa,  $\operatorname{argsenh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , é tal que

$$\operatorname{argsenh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{argsenh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Exercício 19.13.** (Ficha 2, parte 2, II 2.) Considere a restrição da função coseno hiperbólico ao intervalo  $[0, +\infty[$  (cf. Exemplo 5.6). Mostre que a sua função inversa,  $\operatorname{argcosh} : [1, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$ , é tal que

$$\operatorname{argcosh}(x) = \log \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right), \quad \forall x \in [1, +\infty[, \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{argcosh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \forall x \in ]1, +\infty[.$$

## 20. AULA – 11 DE NOVEMBRO DE 2010

Vamos agora estudar a noção de *integral*. As noções de derivada e integral formam, em conjunto, os pilares do Cálculo.

**Motivação para a Noção de Integral.** Uma motivação importante para o estudo de integrais é o cálculo de áreas. Vocês já encontraram a noção intuitiva de área e aprenderam as áreas de alguns conjuntos com geometria simples, tais como um rectângulo ou um círculo. Mas como podemos dar uma definição precisa de área de um região arbitrária do plano?

Vamos considerar uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , limitada e não-negativa. Vamos procurar definir de uma forma precisa a área da região  $R$  que fica por baixo do gráfico desta função:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

\*\*\*FIGURA\*\*\*

Ao valor da área, que iremos definir adiante, chama-se *integral* de  $f$  no intervalo  $[a, b]$ .

Na realidade, vamos permitir que  $f$  tome também valores negativos, como na seguinte figura:

\*\*\*FIGURA\*\*\*

Neste caso, o integral representará a “área com sinal” delimitada pelo gráfico da função, i.e., a diferença entre a área mais escura (acima do eixo horizontal) e a área mais clara (abaixo do eixo horizontal).

Por enquanto, vamos assumir que  $f(x) \geq 0$ . A ideia por detrás da definição de integral é muito simples. Começamos por dividir o intervalo  $[a, b]$  em intervalos mais pequenos, por exemplo em 4 sub-intervalos:

$$[a, b] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup [t_2, t_3] \cup [t_3, t_4].$$

onde os números  $t_0, t_1, t_2, t_3, t_4$ , satisfazem:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = b,$$

No primeiro intervalo  $[t_0, t_1]$  a função tem um valor mínimo  $m_1$  e um valor máximo  $M_1$ , no segundo intervalo  $[t_1, t_2]$  a função tem um valor mínimo  $m_2$  e um valor máximo  $M_2$ , e assim por diante, de forma que no intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  a função tem um valor mínimo  $m_i$  e um valor máximo  $M_i$ .

\*\*\*FIGURA\*\*\*

Desta divisão resulta então uma colecção de rectângulos dentro da região  $R$  e uma colecção de rectângulos contendo a região  $R$ . A soma da área dos rectângulos interiores é:

$$L = m_1(t_1 - t_0) + m_2(t_2 - t_1) + m_3(t_3 - t_2) + m_4(t_4 - t_3),$$

enquanto que a soma da área dos rectângulos exteriores é:

$$U = M_1(t_1 - t_0) + M_2(t_2 - t_1) + M_3(t_3 - t_2) + M_4(t_4 - t_3).$$

**Observação chave:** Qualquer que seja o valor  $A$  para a área de  $R$  deveremos ter:

$$L \leq A \leq U,$$

e isto deve acontecer *independentemente* da partição do intervalo  $[a, b]$ .

Por outro lado, é de esperar que usando partições em sub-intervalos cada vez mais pequenos se obtenham aproximações cada vez melhores para o valor de  $A$ .

**Exemplo 20.1.** Consideremos a função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2$ . Vamos dividir este intervalo em 2 sub-intervalos iguais:  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = \frac{1}{2}$  e  $t_2 = 1$ . Como a função é crescente, num intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  o mínimo de  $f$  é  $m_i = f(t_{i-1})$  e o máximo de  $f$  é  $M_i = f(t_i)$ . Logo:

$$\begin{aligned} m_1 &= f(0) = 0, & M_1 &= f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \\ m_2 &= f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, & M_2 &= f(1) = 1. \end{aligned}$$

Logo obtemos que a soma da área dos rectângulos interiores é:

$$L = 0 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

enquanto que a soma da área dos rectângulos exteriores é:

$$U = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

Assim, a área  $A$  da região delimitada por  $f$  deverá satisfazer:

$$\frac{1}{8} \leq A \leq \frac{5}{8}.$$

Por outro lado, se escolhermos uma subdivisão em 5 intervalos, de forma que  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1/5$ ,  $t_2 = \frac{2}{5}$ ,  $t_3 = \frac{3}{5}$ ,  $t_4 = \frac{4}{5}$  e  $t_5 = 1$ , obtemos:

$$\begin{aligned} m_1 &= f(0) = 0, & M_1 &= f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{25}, \\ m_2 &= f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{25}, & M_2 &= f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{25}, \\ m_3 &= f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{25}, & M_3 &= f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{9}{25}, \\ m_4 &= f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{9}{25}, & M_4 &= f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{25}, \\ m_5 &= f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{25}, & M_5 &= f(1) = 1. \end{aligned}$$

Logo obtemos que a soma da área dos rectângulos interiores é agora:

$$L = 0 \times \frac{1}{5} + \frac{1}{25} \times \frac{1}{5} + \frac{4}{25} \times \frac{1}{5} + \frac{9}{25} \times \frac{1}{5} + \frac{16}{25} \times \frac{1}{5} = \frac{6}{25},$$

enquanto que a soma da área dos rectângulos exteriores é agora:

$$U = \frac{1}{25} \times \frac{1}{5} + \frac{4}{25} \times \frac{1}{5} + \frac{9}{25} \times \frac{1}{5} + \frac{16}{25} \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{1}{5} = \frac{11}{25}.$$

Assim, obtemos melhores estimativas para a área  $A$ :

$$\frac{1}{8} < \frac{6}{25} \leq A \leq \frac{11}{25} < \frac{5}{8}.$$

**Partições, Somas Inferiores e Superiores.** Vamos agora formalizar estas ideias de uma forma precisa.

**Definição 20.2.** Seja  $a < b$  números reais. Uma **partição** do intervalo  $[a, b]$  é uma colecção finita de pontos  $P$  de  $[a, b]$  em que um dos ponto é  $a$  e outro é  $b$ .

É claro que os pontos de uma partição  $P$  podem sempre ser designados  $t_0, \dots, t_n$  de forma que:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Vamos assumir tacitamente que ordenamos sempre as partições desta forma.

**Definição 20.3.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e  $P = \{t_0, \dots, t_n\}$  partição de  $[a, b]$

(a) A **soma inferior** de  $f$  relativa a  $P$ , é o número real

$$L(f, P) := \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}),$$

onde  $m_i = \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ .

(b) A **soma superior** de  $f$  relativa a  $P$ , é o número real

$$U(f, P) := \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}),$$

onde  $M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ .

**Nota 20.4.** Embora motivados para definir  $L(f, P)$  e  $U(f, P)$  como as somas das áreas dos retângulos interiores e exteriores à região  $R$  delimitada por  $f$ , notem que estas definições fazem sentido e são independentes de qualquer noção de área. Notem também que para definir as somas inferior e superior apenas precisamos que a função  $f$  seja limitada (por forma a que tenha ínfimo e supremo finitos em cada subintervalo determinado pela partição  $P$ ). Em particular,  $f$  pode assumir valores negativos e positivos.

**Integral Superior e Inferior.** Vamos agora estudar o que acontece com estas somas quando se alteram as partições.

**Definição 20.5.** Dadas duas partições  $P$  e  $Q$  do intervalo  $[a, b]$  vamos dizer que  $Q$  é **mais fina** ou que **refina**  $P$  se  $P \subset Q$ , i.e., se todos os pontos de  $P$  pertencem a  $Q$ .

**Exemplo 20.6.** Os conjuntos  $P_1 = \{0, 1/2, 1\}$ ,  $P_2 = \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$  e  $P_3 = \{0, 1/3, 2/3, 1\}$  são todas partições do intervalo  $[0, 1]$ . A partição  $P_2$  refina  $P_1$ , mas a partição  $P_3$  não refina  $P_1$ .

O seguinte lema fornece uma primeira propriedade importante das somas superior e inferior.

**Lema 20.7.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada,  $P$  e  $Q$  partições de  $[a, b]$ . Se  $P \subset Q$  então:*

$$L(f, P) \leq L(f, Q) \leq U(f, Q) \leq U(f, P).$$

*Demonstração.* Notem que da definição é claro que para qualquer partição  $P$  temos que:

$$L(f, P) \leq U(f, P).$$

Vamos agora mostrar que  $L(f, P) \leq L(f, Q)$ . A demonstração de que  $U(f, Q) \leq U(f, P)$  é semelhante.

Basta mostrar que  $L(f, P) \leq L(f, Q)$  quando  $Q$  tem apenas mais um ponto que  $P$ . O caso geral segue-se, pois podemos juntar a  $P$  um a um os pontos de  $Q$  obtendo partições  $P \subset P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_k = Q$  em que cada partição tem mais um ponto que a anterior. Assim:

$$L(f, P) \leq L(f, P_1) \leq L(f, P_2) \leq \dots \leq L(f, P_k) = L(f, Q).$$

Seja então  $P = \{t_0, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_n\}$  e  $Q = \{t_0, \dots, t_{i-1}, c, t_i, \dots, t_n\}$ . Temos que:

$$\begin{aligned} L(f, P) &= m_1(t_1 - t_0) + \dots + m_i(t_i - t_{i-1}) + \dots + m_n(t_n - t_{n-1}) \\ &= m_1(t_1 - t_0) + \dots + m_i(c - t_{i-1}) + m_i(t_i - c) + \dots + m_n(t_n - t_{n-1}) \\ &\leq m_1(t_1 - t_0) + \dots + m'(c - t_{i-1}) + m''(t_i - c) + \dots + m_n(t_n - t_{n-1}) = L(f, Q), \end{aligned}$$

onde usámos:

$$\begin{aligned} m' &:= \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq c\} \geq \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\} = m_i, \\ m'' &:= \inf\{f(x) : c \leq x \leq t_i\} \geq \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\} = m_i. \end{aligned}$$

□

## 21. AULA – 15 DE NOVEMBRO DE 2010

**Última Aula.**

- Partição  $P = \{a = t_0 < \dots < t_i < \dots < t_n = b\}$  de um intervalo  $[a, b]$ .
- **Soma inferior** de  $f$  relativa a  $P$ :

$$L(f, P) := \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}),$$

onde  $m_i = \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ .

- **Soma superior** de  $f$  relativa a  $P$ : é o número real

$$U(f, P) := \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}),$$

onde  $M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ .

- Lema 20.7: se  $P \subset Q$ , i.e. se  $Q$  é **mais fina** do que  $P$ , então:

$$L(f, P) \leq L(f, Q) \leq U(f, Q) \leq U(f, P).$$

**Integral Superior e Inferior (cont.)** O seguinte lema fornece uma segunda propriedade importante das somas superior e inferior.

**Lema 21.1.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Para quaisquer partições  $P_1$  e  $P_2$  de  $[a, b]$ :*

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2).$$

*Demonstração.* Seja  $Q = P_1 \cup P_2$ . Então  $Q$  é uma partição que refina  $P_1$  e refina  $P_2$ . Pelo lema 20.7, concluímos que:

$$L(f, P_1) \leq L(f, Q) \leq U(f, Q) \leq U(f, P_2).$$

□

Este lema mostra que o conjunto de todas as somas superiores é minorado e o conjunto de todas as soma inferiores é majorado, logo as seguintes definições fazem sentido.

**Definição 21.2.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada.

- Chama-se **integral inferior de  $f$**  ao número real:

$$\int_a^b f := \sup\{L(f, P) : P \text{ é partição de } [a, b]\}.$$

- Chama-se **integral superior de  $f$**  ao número real:

$$\int_a^b f := \inf\{U(f, P) : P \text{ é partição de } [a, b]\}.$$

Segue-se também do Lema 21.1, que temos sempre:

$$\int_a^b f \leq \int_a^b f.$$

Os seguintes dois exemplos muito simples mostram que estes dois números podem ser iguais ou distintos.

**Exemplo 21.3.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função constante  $f(x) = c$ . Qualquer que seja a partição  $P = \{t_0, \dots, t_n\}$  de  $[a, b]$  temos que:

$$m_i = M_i = c.$$

Segue-se que:

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n c(t_i - t_{i-1}) = c \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = c(b - a),$$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n c(t_i - t_{i-1}) = c \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = c(b - a).$$

Concluimos que

$$\int_a^b f = \sup\{L(f, P) : P \text{ é partição de } [a, b]\} = c(b - a),$$

$$\int_a^b f = \inf\{U(f, P) : P \text{ é partição de } [a, b]\} = c(b - a),$$

e, portanto, neste caso:

$$\int_a^b f = c(b - a) = \int_a^b f.$$

**Exemplo 21.4.** Seja  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a restrição da função de Dirichlet ao intervalo  $[a, b]$ :

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{se } x \in [a, b] - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Qualquer que seja a partição  $P = \{t_0, \dots, t_n\}$  de  $[a, b]$  um subintervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  contém pontos racionais e pontos irracionais, logo:

$$m_i = \inf\{g(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = 0 \quad M_i = \sup\{g(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = 1.$$

Segue-se que:

$$L(g, P) = \sum_{i=1}^n 0(t_i - t_{i-1}) = 0,$$

$$U(g, P) = \sum_{i=1}^n 1(t_i - t_{i-1}) = b - a.$$

Concluimos que

$$\int_a^b g = \sup\{L(g, P) : P \text{ é partição de } [a, b]\} = 0,$$

$$\int_a^b g = \inf\{U(g, P) : P \text{ é partição de } [a, b]\} = b - a,$$

e, portanto, neste caso:

$$\int_a^b g = 0 \neq b - a = \int_a^b g.$$

### Funções Integráveis e Não-Integráveis.

**Definição 21.5.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Dizemos que  $f$  é uma **função integrável** no intervalo  $[a, b]$  se os seus integrais superior e inferior coincidem. Nesse caso, ao valor comum chama-se **integral** de  $f$  em  $[a, b]$  e representa-se pelo símbolo:

$$\int_a^b f = \int_a^b f = \int_a^b f.$$

**Exemplo 21.6.** O Exemplo 21.3 mostra que uma função constante  $f(x) = c$  definida no intervalo  $[a, b]$  é integrável e:

$$\int_a^b f = c(b - a).$$

**Exemplo 21.7.** O Exemplo 21.4 mostra que a restrição da função de Dirichlet a um intervalo  $[a, b]$  não é uma função integrável.

**Exemplo 21.8.** Seja  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  a função  $f(x) = x^2$ , cujo gráfico é:

\*\*\*\* GRAFICO \*\*\*\*

Não é claro deste gráfico qual o valor do integral  $\int_0^1 x^2$ .

Seja  $P_n = \{0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n, 1\}$  a partição de  $[0, 1]$  em  $n$  intervalos de comprimento  $\frac{1}{n}$ . Para esta partição é imediato que:

$$m_i = \inf\{x^2 : \frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n}\} = \frac{(i-1)^2}{n^2},$$

$$M_i = \sup\{x^2 : \frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n}\} = \frac{i^2}{n^2}.$$

Logo, vemos que as somas inferior e superior para esta partição são:

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^2}{n^2} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n^3(1-1/n)(1-1/2n)}{3n^3} = \frac{(1-1/n)(1-1/2n)}{3}, \\ U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3(1+1/n)(1+1/(2n))}{3n^3} \\ &= \frac{(1+1/n)(1+1/(2n))}{3}. \end{aligned}$$

Concluimos que para qualquer  $n \in \mathbb{N}$  existe uma partição  $P_n$  tal que:

$$L(f, P_n) = \frac{(1-1/n)(1-1/2n)}{3} \leq \frac{1}{3} \leq \frac{(1+1/n)(1+1/(2n))}{3} = U(f, P_n).$$

Tomando  $n$  suficientemente grande, podemos fazer estas somas tão próximo de  $1/3$  quanto quisermos. Concluimos que:

$$\overline{\int_0^1 f} = \underline{\int_0^1 f} = \frac{1}{3},$$

donde se segue que  $f(x) = x^2$  é integrável em  $[0, 1]$  e:

$$\int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}.$$

Estes exemplos evidenciam dois problemas que precisamos de resolver para que a noção de integral possa ser realmente útil:

- Como podemos decidir se uma função é integrável ou não?
- Em caso afirmativo, como podemos calcular o seu integral eficientemente?

Começaremos na próxima aula a discutir estas questões.

## 22. AULA – 16 DE NOVEMBRO DE 2010

**Última Aula.** Uma função limitada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se integrável no intervalo  $[a, b]$  se os seus integrais superior e inferior coincidem. Nesse caso:

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b f} = \underline{\int_a^b f}.$$

**Crítérios de integrabilidade.** Vamos agora procurar obter critérios eficientes que nos permitam decidir se uma função limitada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é ou não integrável.

**Proposição 22.1.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Então  $f$  é integrável em  $[a, b]$  sse qualquer que seja  $\varepsilon > 0$  existe uma partição  $P$  de  $[a, b]$  tal que:*

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $f$  é integrável de forma que os seus integrais superiores e inferiores coincidem com o valor do integral:

$$\int_a^b f = \inf\{L(f, P) : P \text{ é partição de } [a, b]\} = \sup\{L(f, P) : P \text{ é partição de } [a, b]\}.$$

Pela propriedade do supremo e do ínfimo enunciada na Proposição 11.5, sabemos então que para qualquer  $\varepsilon > 0$  existem partições  $P_1$  e  $P_2$  tais que

$$L(f, P_1) > \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad U(f, P_2) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considerando a partição  $P = P_1 \cup P_2$ , que refina  $P_1$  e  $P_2$ , e usando o Lema 20.7, obtemos

$$U(f, P) - L(f, P) \leq U(f, P_2) - L(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos agora que qualquer que seja  $\varepsilon > 0$  existe uma partição  $P$  de  $[a, b]$  tal que:

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Como:

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= \inf\{L(f, Q) : Q \text{ é partição de } [a, b]\} \geq L(f, P), \\ \overline{\int_a^b f} &= \sup\{L(f, Q) : Q \text{ é partição de } [a, b]\} \leq U(f, P), \end{aligned}$$

concluimos que:

$$\overline{\int_a^b f} - \int_a^b f \leq U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon$  é arbitrário o integral superior e inferior coincidem, logo a função é integrável.  $\square$

Por vezes, iremos utilizar esta proposição na seguinte forma ligeiramente diferente (demonstrem que este corolário é de facto equivalente à proposição):

**Corolário 22.2.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Então  $f$  é integrável em  $[a, b]$  e  $\int_a^b f = \alpha$  sse qualquer que seja  $\varepsilon > 0$  existe uma partição  $P$  de  $[a, b]$  tal que:*

$$U(f, P), L(f, P) \in ]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[.$$

**Teorema 22.3.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ .*

*Demonstração.* Pelo Teorema de Weierstrass, uma função contínua num intervalo  $[a, b]$  é limitada. Por outro lado, uma função contínua num intervalo  $[a, b]$  é *uniformemente contínua*, i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (x, y \in [a, b] \text{ e } |x - y| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Para uma demonstração desta propriedade vejam o Spivak.

Assim, dado  $\varepsilon > 0$  escolhamos  $\delta$  tal que para todo  $x, y \in [a, b]$ :

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Se escolhermos uma partição  $P = \{t_0, \dots, t_n\}$  tal que  $|t_i - t_{i-1}| < \delta$ , então temos para cada  $i$ :

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \forall x, y \in [t_{i-1}, t_i],$$

de forma que:

$$M_i - m_i \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Pela Proposição 22.1, a função é integrável.  $\square$

Notem que existem muitas funções integráveis que não são contínuas. Por exemplo, existem funções monótonas que não são contínuas e para estas temos que:

**Teorema 22.4.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona. Então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ .*

*Demonstração.* Sendo  $f$  monótona em  $[a, b]$  é claro que  $f$  é limitada por  $f(a)$  e  $f(b)$ . Se  $f(a) = f(b)$  então  $f$  é constante e, pelo Exemplo 21.3, a função é integrável.

Seja então  $f(a) \neq f(b)$ . Vamos supor que  $f$  é crescente:  $f(a) < f(b)$  (o caso decrescente é tratado de forma inteiramente análoga). Dado  $\varepsilon > 0$  podemos escolher uma partição  $P = \{t_0, \dots, t_n\}$  tal que:

$$0 < t_i - t_{i-1} < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Como  $f$  é crescente, temos:

$$m_i = f(t_{i-1}) \text{ e } M_i = f(t_i),$$

logo:

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1})) \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como  $\varepsilon$  era arbitrário, pela Proposição 22.1, a função  $f$  é integrável.  $\square$

Estes dois resultados são critérios que nos permitem verificar que muitas das funções que estudaremos são integráveis.

**Propriedades do integral.** Vamos agora estudar propriedades do integral, que são úteis, por exemplo, no seu cálculo.

**Teorema 22.5** (Aditividade em relação à região de integração). *Sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tais que  $a < c < b$  e suponha-se que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função integrável em  $[a, c]$  e em  $[c, b]$ . Então  $f$  é integrável em  $[a, b]$  e temos:*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

*Demonstração.* Seja  $\alpha = \int_a^c f$  e  $\beta = \int_c^b f$ . Pelo Corolário 22.2, para todo o  $\varepsilon > 0$  existem partições  $P_1$  de  $[a, c]$  e  $P_2$  de  $[c, b]$  tais que:

$$(32) \quad \alpha - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, P_1) \leq \alpha \leq U(f, P_1) < \alpha + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$(33) \quad \beta - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, P_2) \leq \beta \leq U(f, P_2) < \beta + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja  $P = P_1 \cup P_2$ . Então  $P$  é uma partição de  $[a, b]$  para a qual  $L(f, P) = L(f, P_1) + L(f, P_2)$  e  $U(f, P) = U(f, P_1) + U(f, P_2)$ . Assim, a soma de (32) e (33) fornece:

$$(\alpha + \beta) - \varepsilon < L(f, P) \leq \alpha + \beta \leq U(f, P) < (\alpha + \beta) + \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon$  é arbitrário, pelo Corolário 22.2, concluímos que  $f$  é integrável em  $[a, b]$  e que:

$$\int_a^b f = \alpha + \beta = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

□

**Nota 22.6.** Definimos anteriormente o integral  $\int_a^b f$  apenas se  $a < b$ . Introduzimos agora as seguintes convenções:

$$\int_a^a f := 0, \quad \int_a^b f := - \int_b^a f, \text{ se } a > b.$$

Com estas definições, é fácil verificar que a relação:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

é verdadeira para quaisquer  $a, b, c \in \mathbb{R}$  (i.e., mesmo que  $a < c < b$  não se verifique).

### 23. AULA – 18 DE NOVEMBRO DE 2010

#### Propriedades do integral (cont.)

**Teorema 23.1** (Linearidade do integral). *Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções integráveis e  $c \in \mathbb{R}$ . Então:*

$$(i) \quad f + g \text{ é integrável em } [a, b] \text{ e } \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

$$(ii) \quad cf \text{ é integrável em } [a, b] \text{ e } \int_a^b cf = c \int_a^b f.$$

*Demonstração.* Vamos mostrar (i). A demonstração de (ii) é bastante mais fácil e fica como exercício (é boa ideia considerar separadamente os casos  $c > 0$ ,  $c = 0$  e  $c < 0$ ).

Para demonstrar (i), seja então  $\alpha = \int_a^b f$  e  $\beta = \int_a^b g$ . Dado  $\varepsilon > 0$  sabemos que existem partições  $P_1$  e  $P_2$  de  $[a, b]$  tais que:

$$(34) \quad \alpha - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, P_1) \leq \alpha \leq U(f, P_1) < \alpha + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$(35) \quad \beta - \frac{\varepsilon}{2} < L(g, P_2) \leq \beta \leq U(g, P_2) < \beta + \frac{\varepsilon}{2}.$$

É fácil verificar que para um intervalo  $[c, d]$  qualquer e duas funções limitadas  $f$  e  $g$ , temos sempre:

$$\begin{aligned} \inf_{[c,d]} (f + g) &\geq \inf_{[c,d]} f + \inf_{[c,d]} g, \\ \sup_{[c,d]} (f + g) &\leq \sup_{[c,d]} f + \sup_{[c,d]} g. \end{aligned}$$

Sendo assim, se tomarmos a partição  $P = P_1 \cup P_2$  obtemos  $L(f + g, P) \geq L(f, P) + L(g, P)$  e  $U(f + g, P) \leq U(f, P) + U(g, P)$ . A soma das equações (34) e (35) fornece então:

$$(\alpha + \beta) - \varepsilon < L(f, P_1) + L(g, P_2) \leq L(f, P) + L(g, P) \leq L(f + g, P) \leq \\ \leq U(f + g, P) \leq U(f, P) + U(g, P) \leq U(f, P_1) + U(g, P_2) < (\alpha + \beta) + \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon$  é arbitrário, isto mostra que  $f + g$  é integrável em  $[a, b]$  e o seu integral é dado por:

$$\int_a^b (f + g) = \alpha + \beta = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

□

**Nota 23.2.** Pode-se mostrar (mais difícil!) que se  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são funções integráveis em  $[a, b]$  então  $fg$  também é uma função integrável em  $[a, b]$ . Notem no entanto que, em geral,

$$\int_a^b (fg) \neq \left( \int_a^b f \right) \left( \int_a^b g \right).$$

Por outro lado, se  $f$  e  $g$  são funções integráveis, a função composta  $f \circ g$  pode não ser uma função integrável (encontrem um exemplo!).

**Teorema 23.3** (Monotonia do integral). *Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções integráveis.*

(i) *Se  $f(x) \geq 0$  para todo o  $x \in [a, b]$  então  $\int_a^b f \geq 0$ .*

(ii) *Se  $f(x) \leq g(x)$  para todo o  $x \in [a, b]$  então  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ .*

Em particular, se  $m \leq f(x) \leq M$  para todo o  $x \in [a, b]$  então:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a).$$

*Demonstração.* A demonstração de (i) fica como exercício. Para demonstrar (ii) reparem que  $f(x) \leq g(x)$  sse  $g(x) - f(x) \geq 0$ . Assim, aplicando (i) à função  $g - f$  e usando a linearidade do integral, obtemos:

$$\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g - f) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Finalmente, aplicando (ii) às funções constantes  $g(x) = m$  e  $h(x) = M$ , obtemos:

$$m(b - a) = \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M = M(b - a).$$

□

Recordem-se que para quaisquer números reais  $a$  e  $b$ :  $|a + b| \leq |a| + |b|$ . Segue-se que para quaisquer números reais  $x_1, \dots, x_n$ :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

A próxima propriedade do integral pode ser vista como um generalização desta propriedade:

**Teorema 23.4** (Módulo e integral). *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Então  $|f|$  é uma função integrável em  $[a, b]$  e temos:*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

*Demonstração.* Dada uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vamos designar por  $f^+$  a sua parte não-negativa e por  $f^-$  a sua parte não-positiva:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{se } f(x) < 0, \end{cases} \quad f^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } f(x) > 0, \\ -f(x), & \text{se } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

Notem que  $f^+ \geq 0$ ,  $f^- \geq 0$ ,  $f = f^+ - f^-$  e  $|f| = f^+ + f^-$ . Agora temos o seguinte exercício:

**Exercício 23.5.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e  $P$  uma partição de  $[a, b]$ . Se  $M_i$  e  $m_i$  são como anteriormente para  $f$ ,  $M'_i$  e  $m'_i$  analogamente para  $|f|$ , mostre que:

$$M'_i - m'_i \leq M_i - m_i.$$

Conclua que se  $f$  é integrável então  $|f|$  é integrável.

Por este exercício, segue-se do Teorema 23.1 que  $f^+ = 1/2(|f| + f)$  e  $f^- = 1/2(|f| - f)$  também são funções integráveis. Recorrendo também ao Teorema 23.3, concluímos que:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f \right| &= \left| \int_a^b (f^+ - f^-) \right| \\ &= \left| \int_a^b f^+ - \int_a^b f^- \right| \\ &\leq \left| \int_a^b f^+ \right| + \left| \int_a^b f^- \right| \\ &= \int_a^b f^+ + \int_a^b f^- \\ &= \int_a^b (f^+ + f^-) = \int_a^b |f|. \end{aligned}$$

□

**Nota 23.6.** O Teorema 23.4 diz-nos que se  $f$  é integrável em  $[a, b]$  então  $|f|$  também é integrável em  $[a, b]$ , mas o recíproco, em geral, não é verdadeiro. Por exemplo, para a função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}; \\ 1, & \text{se } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$$

temos que  $|f| = 1$  é uma função constante. Portanto  $|f|$  é integrável em  $[a, b]$ , mas  $f$  não é integrável em  $[a, b]$ .

**Integral Indefinido.** Vamos agora estudar uma ferramenta muito eficiente para calcular integrais, baseada no chamado Teorema Fundamental do Cálculo que relaciona o integral com a derivada.

Começamos por observar que integrar uma função “suaviza” o seu comportamento:

**Teorema 23.7.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. A função  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:*

$$F(x) := \int_a^x f,$$

*é contínua.*

**Nota 23.8.** É costume chamar a  $F$  o **integral indefinido** de  $f$  com origem em  $a$ . Por vezes, para acentuar que  $x$  é uma variável, escrevemos este integral indefinido na forma:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

*Demonstração.* Como a função  $f$  é integrável, por definição, é limitada: existe  $L > 0$  tal que

$$|f(x)| \leq L, \quad \forall x \in [a, b].$$

Seja então  $c \in [a, b]$ . Temos que:

$$\begin{aligned} |F(c+h) - F(c)| &= \left| \int_a^{c+h} f - \int_a^c f \right| = \left| \int_c^{c+h} f \right| \\ &\leq \left| \int_c^{c+h} |f| \right| \leq \left| \int_c^{c+h} L \right| = L|h|. \end{aligned}$$

(notem que  $h$  pode ser  $> 0$  ou  $< 0$ ). Assim, dado  $\varepsilon > 0$  escolhemos  $\delta = \varepsilon/L$ , e obtemos:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |h| < \delta \Rightarrow |F(c+h) - F(c)| \leq \varepsilon,$$

portanto,  $\lim_{h \rightarrow 0} F(c+h) = F(c)$ , logo  $F$  é contínua em  $c$ .  $\square$

**Exemplo 23.9.** Consideremos a restrição da função de Heaviside  $h : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Sendo esta função monótona, é integrável. O seu integral indefinido relativo a  $a = -1$  é a função:

$$F(x) = \int_{-1}^x h(t) dt = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

que é uma função contínua. Notem pois que o integral transforma uma função descontínua numa função contínua!

#### 24. AULA – 22 DE NOVEMBRO DE 2010

**Teorema Fundamental do Cálculo.** Quando a função integranda  $f$  é contínua o integral indefinido é diferenciável e a derivada é especialmente simples:

**Teorema 24.1** (Teorema Fundamental do Cálculo). *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável e  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o seu integral indefinido:*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Se  $f$  é contínua em  $c \in [a, b]$  então  $F$  é diferenciável em  $c$  e:

$$F'(c) = f(c).$$

(Se  $c = a$  ou  $c = b$  então por  $F'(c)$  entenda-se a derivada lateral direita ou esquerda de  $F$ .)

*Demonstração.* Vamos supor que  $c \in ]a, b[$ . Os casos  $c = a$  e  $c = b$  tratam-se de forma semelhante.

Suponha-se primeiro que  $h > 0$  e defina-se:

$$m_h := \inf\{f(x) : c \leq x \leq c+h\}$$

$$M_h := \sup\{f(x) : c \leq x \leq c+h\}.$$

Notem que como  $f$  é contínua em  $c$  temos que:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} m_h = \lim_{h \rightarrow 0^+} M_h = f(c).$$

Como  $m_h \leq f(x) \leq M_h$  para  $x \in [c, c+h]$ , a monotonia do integral mostra que:

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t) dt \Rightarrow m_h h \leq F(c+h) - F(c) \leq M_h h.$$

Pelo princípio do encaixe, concluímos que:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} m_h = \lim_{h \rightarrow 0^+} M_h = f(c).$$

O caso  $h < 0$  é inteiramente análogo e fornece:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

Portanto, as derivadas laterais de  $F$  existem em  $x = c$  e são ambas iguais a  $f(c)$ . Logo  $F$  é diferenciável em  $c$  e  $F'(c) = f(c)$ .  $\square$

**Nota 24.2.** Neste teorema considerámos o caso em que o limite superior do integral varia. No entanto, observem que o caso em que o limite inferior varia reduz-se a este:

$$G(x) = \int_x^b f(t) dt = \int_x^a f(t) dt + \int_a^b f(t) dt = - \int_a^x f(t) dt + \int_a^b f(t) dt.$$

Logo, se  $f$  é contínua em  $c$ , obtemos:

$$G'(c) = -f(c).$$

Daqui resulta que se  $f$  está definida para  $x < a$  então a derivada de  $F(x) = \int_a^x f = - \int_x^a f$  em  $c < a$  é dada por:

$$F'(c) = -(-f(c)) = f(c).$$

Conclusão:

- (a) Se  $f$  é contínua em  $x = c$  então a derivada de  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  em  $x = c$  é dada por  $F'(c) = f(c)$  (não interessa se  $c < a$  ou  $c > a$ ).
- (b) Se  $f$  é contínua em  $x = c$  então a derivada de  $G(x) = \int_x^b f(t) dt$  em  $x = c$  é dada por  $G'(c) = -f(c)$  (não interessa se  $c < b$  ou  $c > b$ ).

**Primitivas e Regra de Barrow.** O Teorema Fundamental do Cálculo é especialmente útil quando a função integranda  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em todos os pontos, pois obtemos:

**Corolário 24.3.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então o seu integral indefinido  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

*é uma primitiva de  $f$ , i.e.  $F$  é uma função diferenciável tal que  $F' = f$ .*

Na realidade, obtemos ainda um método eficiente para o cálculo de integrais:

**Corolário 24.4.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma primitiva de  $f$ , i.e. uma função diferenciável tal que  $F' = f$ . Então:*

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

*Demonstração.* Basta observar que as funções  $F(x)$  e  $\int_a^x f(t) dt$  possuem a mesma derivada em todos os pontos  $x \in [a, b]$ , logo diferem por uma constante  $c \in \mathbb{R}$ :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + c.$$

Segue-se que:

$$F(b) - F(a) = \left( \int_a^b f(t) dt + c \right) - \left( \int_a^a f(t) dt + c \right) = \int_a^b f(t) dt.$$

□

**Nota 24.5.** É costume usar-se qualquer uma das seguintes notações:

$$F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b = [F(t)]_{t=a}^{t=b} = F(t)|_a^b = F(t)|_{t=a}^{t=b}.$$

É usual designar-se por **Regra de Barrow** a fórmula:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a), \quad (\text{onde } F \text{ é uma primitiva de } f).$$

**Exemplo 24.6.** A função  $f(x) = x^n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , tem a primitiva  $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$  (diferenciem esta função para verificar que  $F' = f$ ). Logo:

$$\int_0^1 x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Comparem com as dificuldades que tivemos para calcular o integral nos casos  $n = 1$  e  $n = 2$ !

**Exemplo 24.7.** Recordemos que  $(\sin x)' = \cos x$  e que  $(\cos x)' = -\sin x$ . Estas fórmulas dão-nos pois primitivas das funções  $\sin$  e  $\cos$ . Assim, por exemplo, temos que:

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = \cos(0) - \cos(\pi) = 1 - (-1) = 2.$$

Reparem que isto é o valor da área por de baixo do gráfico da função  $\sin x$  assinalada na figura seguinte: \*\*\* FIGURA \*\*\*\*

**Exemplos de Cálculo de Primitivas e Integrais.** Pela Regra de Barrow, para calcular o integral  $\int_a^b f$  tudo o que temos de saber é uma primitiva  $F$  de  $f$ . Os exemplos seguintes ilustram isto mesmo.

**Exemplo 24.8.** A função exponencial satisfaz  $(e^x)' = e^x$ . Assim, por exemplo, temos:

$$\int_0^2 e^x \, dx = [e^x]_0^2 = e^2 - 1.$$

Da mesma forma, para as funções hiperbólicas temos que:  $(\sinh x)' = \cosh x$  e  $(\cosh x)' = \sinh x$ . Donde temos, por exemplo, que:

$$\int_{-2}^2 \cosh x \, dx = \sinh x \Big|_{x=-2}^{x=2} = \sinh(2) - \sinh(-2) = 2 \sinh(2).$$

**Exemplo 24.9.** A função  $f(x) = \frac{1}{x^n}$ , para  $n \in \mathbb{N}$ , não é limitada em qualquer intervalo que contenha a origem. No entanto, se  $a$  e  $b$  são ambos positivos ou ambos negativos, a função  $f$  é contínua em  $[a, b]$ .

Se  $n \geq 2$ , uma primitiva de  $f(x) = \frac{1}{x^n}$  é a função  $F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$  (verifiquem!), logo:

$$\int_a^b \frac{dx}{x^n} = - \left[ \frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \right]_a^b = \frac{1}{n-1} \left[ \frac{1}{a^{n-1}} - \frac{1}{b^{n-1}} \right], \text{ quando } a, b > 0 \text{ ou } a, b < 0.$$

Em particular,

$$\int_1^b \frac{1}{x^2} \, dx = 1 - \frac{1}{b}, \quad \forall b > 0, \quad \text{pelo que} \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{b} \right) = 1.$$

Como é que interpreta geometricamente este facto?

A fórmula anterior para a primitiva de  $f(x) = \frac{1}{x^n}$  não funciona quando  $n = 1$ . Neste caso, temos que  $(\log x)' = 1/x$ ,  $x > 0$ , e  $(\log(-x))' = 1/x$ ,  $x < 0$ . Logo,  $F(x) = \log|x|$  é uma primitiva de  $f(x) = 1/x$  em qualquer intervalo  $[a, b]$  com  $a, b > 0$  ou  $a, b < 0$ . Temos portanto:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \log|b| - \log|a| = \log\left(\frac{b}{a}\right), \text{ quando } a, b > 0 \text{ ou } a, b < 0.$$

Em particular,

$$\int_1^b \frac{1}{x} \, dx = \log b, \quad \forall b > 0, \quad \text{pelo que} \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \log b = +\infty.$$

Como é que interpreta geometricamente este facto?

**Nota 24.10.** Daqui em diante, se  $f$  é uma função contínua vamos designar por  $\int f(x) \, dx$  uma primitiva da função  $f$ . Por exemplo, escreveremos:

$$\int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4}.$$

Esta notação representa uma certo abuso, mas é completamente standard. Notem que podemos adicionar qualquer constante à função do lado direito e ainda obter uma primitiva:

$$\int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + C.$$

## 25. AULA – 23 DE NOVEMBRO DE 2010

**Última aula.** Teorema Fundamental do Cálculo: se  $f$  é contínua em  $x = c$  então a derivada do integral indefinido  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  em  $x = c$  existe e é dada por  $F'(c) = f(c)$ .

Regra de Barrow: se  $F$  é uma primitiva de  $f$ , i.e.  $F' = f$ , então

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

**Primitivação e Integração por Partes.** Vamos agora estudar alguns métodos de primitivação que serão úteis no cálculo explícito de integrais. Começamos por um método que permite, por exemplo, calcular uma primitiva da função  $f(x) = x \log x$ .

**Teorema 25.1** (Primitivação por partes). *Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções de classe  $C^1$ . Então:*

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx,$$

e portanto:

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

*Demonstração.* Para a demonstração basta observar que a regra de derivação do produto se escreve:

$$(fg)' = f'g + fg' \Leftrightarrow fg' = (fg)' - f'g.$$

Portanto, temos que:

$$\int fg' = \int (fg)' - \int f'g = fg - \int f'g.$$

□

**Exemplo 25.2.** Por exemplo, para determinar uma primitiva de  $x \log x$ , tomamos  $f(x) = \log x$  e  $g(x) = x^2/2$  de forma que  $f(x)g'(x) = x \log x$ . Como  $f'(x)g(x) = \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} = \frac{x}{2}$ , a regra de primitivação por partes fornece:

$$\begin{aligned} \int x \log x dx &= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4}. \end{aligned}$$

**Exemplo 25.3.** Para calcular o integral:

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx,$$

tomamos  $f(x) = x^2/2$  e  $g(x) = e^{x^2}$  de forma que  $f(x)g'(x) = x^3 e^{x^2}$ . Como  $f'(x)g(x) = x e^{x^2}$ , concluímos que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx &= \left[ \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x e^{x^2} dx \\ &= \frac{e}{2} - \left[ \frac{e^{x^2}}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Primitivação e Integração por Substituição.** Um outro método muito útil no cálculo de primitivas é o seguinte:

**Teorema 25.4** (Primitivação por substituição). *Se  $f$  e  $g'$  são funções contínuas, então:*

$$\int f(u) du = \int f(g(x))g'(x) dx, \quad \text{onde } u = g(x),$$

e portanto:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx.$$

*Demonstração.* Para a demonstração basta observar que se  $F$  é uma primitiva de  $f$ , então o lado esquerdo da fórmula é:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Por outro lado, pela regra de derivação da função composta:

$$(F \circ g)' = (F' \circ g) g' = (f \circ g) g',$$

donde o lado direito da fórmula escreve-se:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx = \int_a^b (F(g(x)))' \, dx = F(g(b)) - F(g(a)).$$

□

**Nota 25.5.** Notem que o método de primitivação por substituição para o cálculo do integral

$$\int f(g(x))g'(x) \, dx,$$

tem três passos:

- (i) Tomar  $u = g(x)$  e  $du = g'(x) \, dx$  (depois desta manipulação, só a variável  $u$  deve aparecer);
- (ii) Encontrar uma primitiva (como uma expressão envolvendo  $u$ );
- (iii) Substituir de volta  $u$  por  $g(x)$ .

Os próximos exemplos ilustram este método.

**Exemplo 25.6.**

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \cos x \, dx &= \int u^5 \, du \quad (\text{tomando } u = \sin x \text{ de forma que } du = \cos x \, dx) \\ &= \frac{u^6}{6} \\ &= \frac{\sin^6 x}{6} \quad (\text{substituindo de volta } u = \sin x). \end{aligned}$$

**Exemplo 25.7.**

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} \frac{1}{x \log x} \, dx &= \int_1^2 \frac{1}{u} \, du \quad (\text{tomando } u = \log x \text{ de forma que } du = \frac{1}{x} \, dx) \\ &= \log u \Big|_{u=1}^{u=2} \\ &= \log 2 - \log 1 = \log 2. \end{aligned}$$

Notem que ao fazermos a substituição  $u = \log x$ , também transformámos os respectivos limites:

$$\begin{aligned} x = e &\mapsto u = \log e = 1 \\ x = e^2 &\mapsto u = \log e^2 = 2 \end{aligned}$$

Neste caso, não é necessário substituir de volta  $u = \log x$ .

**Exemplo 25.8.** Nos dois exemplos anteriores a substituição era quase óbvia. No caso da primitiva

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx,$$

a substituição já não é tão óbvia. No entanto, a relação  $\sqrt{1-\sin^2 u} = \cos u$  sugere a substituição

$$x = \sin u \Leftrightarrow u = \arcsen x \quad \text{em que} \quad x \in ]-1, 1[ \Leftrightarrow u \in ]-\pi/2, \pi/2[.$$

Como  $dx = \cos u \, du$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} \, dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 u} \cos u \, du \quad (\text{tomando } x = \sin u) \\ &= \int \cos^2 u \, du = \int \frac{1+\cos(2u)}{2} \, du \\ &= \frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4} = \frac{u}{2} + \frac{\sin u \cos u}{2} \\ &= \frac{u}{2} + \frac{\sin u \sqrt{1-\sin^2 u}}{2} \\ &= \frac{\arcsen x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} \quad (\text{substituindo de volta } x = \sin u). \end{aligned}$$

Mais geralmente, a mesma substituição  $x = \sin u$  transforma qualquer integral da forma:

$$\int R(x, \sqrt{1-x^2}) \, dx,$$

onde  $R(x, y)$  é uma função racional de  $x$  e  $y$ , no integral

$$\int R(\sin u, \cos u) \cos u \, du.$$

**Exercício 25.9.** Seja  $R(x, y)$  uma função racional de  $x$  e  $y$ . Mostre que a substituição  $x = \tan u$  transforma qualquer integral da forma:

$$\int R(x, \sqrt{1+x^2}) \, dx,$$

num integral de uma função racional de  $\sin u$  e  $\cos u$ .

## 26. AULA – 25 DE NOVEMBRO DE 2010

**Última Aula.** Primitivação e Integração por Partes e Substituição.

**Primitivação de Funções Racionais.** É possível primitivar qualquer função racional, i.e. qualquer função da forma:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0},$$

em termos de funções elementares. Notem que podemos assumir  $a_n = b_m = 1$ . Por outro lado, também basta considerar o caso  $n < m$ , pois se  $n \geq m$  podemos recorrer à divisão de polinômios para escrever:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

onde  $g(x)$  é um polinômio e  $r(x)$  é o resto da divisão, que tem grau inferior a  $q(x)$ . Por exemplo:

$$f(x) = \frac{u^4 - 4u^2 + 3u - 4}{u^2 + 1} = u^2 - 5 + \frac{3u + 1}{u^2 + 1}.$$

Assim, vamos assumir que  $a_n = b_m = 1$  e  $n < m$ .

Antes de enunciarmos o caso geral, ilustramos o método quando  $p$  é um polinômio de grau  $\leq 2$  e  $q$  é um polinômio do terceiro grau:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2 + a_1 x + a_0}{x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0},$$

A primitiva de  $f = p/q$  depende essencialmente da natureza do polinômio denominador.

**Caso 1.** O polinômio denominador  $q$  tem 3 raízes reais distintas, i.e.

$$q(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma), \text{ com } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha.$$

Neste caso, a função racional  $f = p/q$  pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} + \frac{C}{x - \gamma}, \text{ com } A, B, C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x) dx = A \log|x - \alpha| + B \log|x - \beta| + C \log|x - \gamma|.$$

**Caso 2.** O polinómio denominador  $q$  tem uma raiz real simples e outra raiz real dupla, i.e.

$$q(x) = (x - \alpha)(x - \beta)^2, \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \beta.$$

Neste caso, a função racional  $f = p/q$  pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} + \frac{C}{(x - \beta)^2}, \text{ com } A, B, C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x) dx = A \log|x - \alpha| + B \log|x - \beta| - \frac{C}{x - \beta}.$$

**Caso 3.** O polinómio denominador  $q$  tem uma raiz real tripla, i.e.

$$q(x) = (x - \alpha)^3, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, a função racional  $f = p/q$  pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{(x - \alpha)^2} + \frac{C}{(x - \alpha)^3}, \text{ com } A, B, C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x) dx = A \log|x - \alpha| - \frac{B}{x - \alpha} - \frac{C}{2(x - \alpha)^2}.$$

**Caso 4.** O polinómio denominador  $q$  tem apenas uma raiz real simples, i.e.

$$q(x) = (x - \alpha)((x - a)^2 + b^2), \text{ com } \alpha, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0.$$

Neste caso, a função racional  $f = p/q$  pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{Bx + C}{(x - a)^2 + b^2}, \text{ com } A, B, C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x) dx = A \log|x - \alpha| + \int \frac{Bx + C}{(x - a)^2 + b^2} dx,$$

onde a última primitiva é quase-imediata, podendo ser expressa usando as funções logaritmo e arco tangente, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx + C}{(x - a)^2 + b^2} dx &= \int \frac{B(x - a)}{(x - a)^2 + b^2} dx + \int \frac{Ba + b^2}{(x - a)^2 + b^2} dx \\ &= \frac{B}{2} \int \frac{2(x - a)}{(x - a)^2 + b^2} dx + \frac{Ba + b^2}{b} \int \frac{1/b}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{B}{2} \log((x - a)^2 + b^2) + \frac{Ba + b^2}{b} \arctan\left(\frac{x - a}{b}\right). \end{aligned}$$

**Caso Geral.** O que acabamos de ver é um exemplo particular do seguinte resultado geral:

**Teorema 26.1** (Decomposição em Frações Parciais). *Seja  $n < m$ , e considere-se a função racional*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0}{x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0}.$$

*Então o denominador pode ser factorizado na forma:*

$$p(x) = (x - \alpha_1)^{r_1} \dots (x - \alpha_k)^{r_k} ([x - a_1]^2 + b_1^2)^{s_1} \dots ([x - a_l]^2 + b_l^2)^{s_l},$$

e a função racional pode ser decomposta na forma:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \left[ \frac{a_{1,1}}{(x - \alpha_1)} + \dots + \frac{a_{1,r_1}}{(x - \alpha_1)^{r_1}} \right] + \dots + \left[ \frac{a_{k,1}}{(x - \alpha_k)} + \dots + \frac{a_{k,r_k}}{(x - \alpha_k)^{r_k}} \right] +$$

$$+ \left[ \frac{A_{1,1} + B_{1,1}x}{(x - a_1)^2 + b_1^2} + \dots + \frac{A_{1,s_1} + B_{1,s_1}x}{((x - a_1)^2 + b_1^2)^{s_1}} \right] + \dots +$$

$$+ \left[ \frac{A_{l,1} + B_{l,1}x}{(x - a_l)^2 + b_l^2} + \dots + \frac{A_{l,s_l} + B_{l,s_l}x}{((x - a_l)^2 + b_l^2)^{s_l}} \right].$$

Notem que a fatorização de  $q(x)$  dada pelo teorema tem o seguinte significado:

- $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  são as raízes reais de  $q(x)$  com multiplicidade, respectivamente,  $r_1, \dots, r_k$ ;
- $a_l \pm i b_l, \dots, a_l \pm i b_l$  são as raízes complexas de  $q(x)$  com multiplicidade, respectivamente,  $s_1, \dots, s_l$ ;

Não demonstraremos este teorema. Este resultado reduz o cálculo da primitiva de uma função racional a primitivas que já conhecemos, pois temos

(a) Para as raízes reais:

$$\int \frac{a}{(x - \alpha)^r} dx = \begin{cases} a \log(x - \alpha), & \text{se } r = 1, \\ \frac{a}{(r-1)(x-\alpha)^{r-1}}, & \text{se } r > 1. \end{cases}$$

(b) Para as raízes complexas:

$$\int \frac{A + Bx}{((x - a)^2 + b^2)^s} dx = \frac{B}{2} \int \frac{2(x - a)}{((x - a)^2 + b^2)^s} dx + (A + aB) \int \frac{1}{((x - a)^2 + b^2)^s} dx.$$

A primeira primitiva pode ser calculada recorrendo à substituição  $u = (x - a)^2 + b^2$ . A segunda primitiva pode ser calculada por aplicação sucessiva de primitivação por partes, como no exercício seguinte:

**Exercício 26.2.** Usando primitivação por partes, mostre que para  $s > 1$ :

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^s} dx = \frac{1}{2s - 2} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^{s-1}} + \frac{2s - 3}{2s - 2} \int \frac{1}{(x^2 + 1)^{s-1}} dx.$$

27. AULA - 29 DE NOVEMBRO DE 2010

**Primitivação de Funções Trigonométricas.** Para calcular primitivas de funções trigonométricas:

$$\int \text{sen}^n x \cos^m x dx,$$

usaremos as fórmulas trigonométricas conhecidas:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Há vários casos a considerar:

**Caso 1.** Primitivas do tipo:

$$\int \text{sen}^n x dx \text{ ou } \int \cos^n x dx,$$

onde  $n = 2k$  é par. As fórmulas trigonométricas acima permitem obter, sucessivamente, uma expressão em potências mais baixas de seno ou cosseno, que eventualmente sabemos como primitivar. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \int \text{sen}^4 x dx &= \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\ &= \int \frac{1}{4} dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx + \frac{1}{4} \int \cos^2(2x) dx \\ &= \int \frac{1}{4} dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx + \frac{1}{8} \int (1 + \cos(4x)) dx \end{aligned}$$

e nesta última expressão sabemos calcular todas as primitivas.

**Caso 2.** Primitivas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx \text{ ou } \int \operatorname{cos}^n x \, dx,$$

onde  $n = 2k + 1$  é ímpar. Neste caso, utilizamos a fórmula trigonométrica fundamental seguida de uma substituição. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cos}^{2k+1} x \, dx &= \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \operatorname{cos} x \, dx \\ &= \int (1 - u^2)^k \, du \quad (u = \operatorname{sen} x). \end{aligned}$$

**Caso 3.** Primitivas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \operatorname{cos}^m x \, dx,$$

onde  $n$  ou  $m$  são ímpares, são tratados de forma análoga ao anterior. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^4 x \operatorname{cos}^5 x \, dx &= \int \operatorname{sen}^4 x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{cos} x \, dx \\ &= \int u^4 (1 - u^2)^2 \, du \quad (u = \operatorname{sen} x). \end{aligned}$$

**Caso 4.** Primitivas do tipo:

$$\int \operatorname{sen}^n x \operatorname{cos}^m x \, dx,$$

onde  $n$  e  $m$  são ambos pares. Neste caso, utilizamos as fórmulas trigonométricas para  $\operatorname{sen}^2 x$  e  $\operatorname{cos}^2 x$ , de forma análoga ao Caso 1.

**Primitivação de Funções Racionais de Senos e Cosenos.** Suponhamos que queremos calcular uma primitiva de uma função racional de senos e cosenos:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x) \, dx.$$

Existe uma substituição (talvez um pouco inesperada!) que permite reduzir esta primitiva a uma primitiva de uma função racional usual. Como veremos depois, é possível primitivar qualquer função racional usual.

Consideremos então a substituição:

$$u = \tan \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2 \arctan u, \quad dx = \frac{2}{1+u^2} \, du.$$

Observamos que:

$$y = \frac{x}{2} = \arctan u \Rightarrow u^2 = \tan^2 y = \frac{\operatorname{sen}^2 y}{\operatorname{cos}^2 y} = \frac{\operatorname{sen}^2 y}{1 - \operatorname{sen}^2 y}$$

Resolvendo em ordem a  $u^2$ , obtemos:

$$\operatorname{sen}^2 y = \frac{u^2}{1+u^2}, \quad \operatorname{cos}^2 y = 1 - \operatorname{sen}^2 y = \frac{1}{1+u^2}.$$

Usando as formulas trigonométricas para  $\operatorname{sen}(2y)$  e  $\operatorname{cos}(2y)$  obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(2y) &= 2 \operatorname{sen} y \operatorname{cos} y = 2 \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{2u}{1+u^2}, \\ \operatorname{cos}(x) = \operatorname{cos}(2y) &= \operatorname{cos}^2 y - \operatorname{sen}^2 y = 2 \frac{1}{1+u^2} - \frac{u^2}{1+u^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}. \end{aligned}$$

Assim, a substituição  $x = 2 \arctan u$  fornece:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x) \, dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \cdot \frac{2}{1+u^2} \, du.$$

Concluimos, tal como tínhamos afirmado, que esta substituição transforma uma primitiva de uma função racional de senos e cossenos numa primitiva de uma função racional usual.

**Exemplo 27.1.**

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 + 5 \sin x} &= \int \frac{1}{3 + 5 \frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2} du \quad (u = \tan \frac{x}{2}) \\ &= \int \frac{1+u^2}{3u^2 + 10u + 3} \cdot \frac{2}{1+u^2} du = \int \frac{2}{3u^2 + 10u + 3} du. \end{aligned}$$

Há dois casos particulares de funções racionais de senos e cossenos em que uma substituição bastante mais simples as transforma também em funções racionais usuais:

**Caso 1.**

$$\int R(\sin x) \cdot \cos x \, dx = \int R(u) \, du, \text{ em que } u = \sin x \text{ e portanto } du = \cos x \, dx.$$

**Caso 2.**

$$\int R(\cos x) \cdot \sin x \, dx = - \int R(u) \, du, \text{ em que } u = \cos x \text{ e portanto } du = -\sin x \, dx.$$

**As Funções Exponencial e Logaritmo.** Vamos começar por definir a função logaritmo como uma função diferenciável cuja derivada é  $1/x$  e que em  $x = 1$  se anula:

**Definição 27.2.** A **função logaritmo** é a função  $\log : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$\log x := \int_1^x \frac{1}{t} \, dt.$$

Notem que, a partir desta definição, podemos concluir desde já que o logaritmo possui as seguintes propriedades:

- $\log 1 = \int_1^1 1/t \, dt = 0$
- É uma função infinitamente diferenciável, pois pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que  $(\log x)' = \frac{1}{x}$ ;
- É uma função estritamente crescente pois a sua derivada é sempre positiva;
- Possui concavidade sempre virada para baixo, pois a sua segunda derivada  $(\log x)'' = -\frac{1}{x^2}$  é sempre negativa.

Não é claro a partir desta definição o que acontece a  $\log x$  quando  $x \rightarrow 0^+$  ou  $x \rightarrow +\infty$ . Para isso, precisamos da seguinte propriedade fundamental do logaritmo:

**Teorema 27.3.** Se  $x, y > 0$ , temos que:

$$\log(xy) = \log x + \log y.$$

*Demonstração.* Fixemos  $y > 0$ , e consideremos a função:

$$f(x) := \log(xy).$$

A regra de derivação da função composta, fornece:

$$f'(x) = \log'(xy) \cdot y = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}.$$

Como  $f(x)$  e  $\log(x)$  possuem a mesma derivada, concluimos que existe um número  $c$  tal que:

$$f(x) = \log x + c, \forall x > 0 \Leftrightarrow \log(xy) = \log x + c, \forall x > 0.$$

O número  $c$  pode ser determinado tomando  $x = 1$ :

$$\log y = \log(1 \cdot y) = \log 1 + c = c.$$

Assim, concluimos que:

$$\log(xy) = \log x + \log y, \forall x, y > 0.$$

□

**Corolário 27.4.** Se  $x, y > 0$ , temos que:

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y.$$

*Demonstração.* Basta observar que:

$$\log x = \log\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = \log\left(\frac{x}{y}\right) + \log y.$$

□

**Corolário 27.5.** Para todo o natural  $n \in \mathbb{Z}$  e  $x > 0$  temos que:

$$\log(x^n) = n \log x.$$

*Demonstração.* O resultado é claro se  $n = 0$ . Pelo corolário anterior, basta mostrar este resultado para  $n \in \mathbb{N}$ . Mostrem por indução que a relação é verdadeira para  $n \in \mathbb{N}$ . □

Como o  $\log$  é estritamente crescente, temos  $\log 2 > \log 1 = 0$ . Como

$$\log(2^n) = n \log 2, \quad (n \in \mathbb{N})$$

concluimos que  $\log x$  não é uma função majorada. Portanto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty.$$

Por outro lado, temos que:

$$\log\left(\frac{1}{2^n}\right) = \log 2^{-n} = -n \log 2, \quad (n \in \mathbb{N})$$

concluimos que  $\log x$  não é uma função minorada. Portanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty.$$

Segue-se pois que o contradomínio do logaritmo é  $\mathbb{R}$ .

Recorrendo a estas propriedades do logaritmo, podemos esboçar o seu gráfico:

\*\*\*\* GRAFICO \*\*\*\*

Como acabámos de ver,  $\log : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função estritamente crescente com contradomínio  $\mathbb{R}$ . Logo possui uma função inversa com domínio  $\mathbb{R}$  e contradomínio  $]0, +\infty[$ . Naturalmente:

**Definição 27.6.** A função exponencial  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  é a função inversa do logaritmo.

Vamos agora recuperar as propriedades básicas da exponencial a partir desta definição.

**Teorema 27.7.** A função exponencial é diferenciável e a sua derivada é ela própria:

$$(\exp(x))' = \exp(x).$$

Para quaisquer dois números  $x$  e  $y$  temos que:

$$(36) \quad \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

*Demonstração.* Como  $(\log x)' = \frac{1}{x} \neq 0$ , o Teorema 19.5 mostra que a sua inversa é diferenciável e a sua derivada é dada por:

$$\begin{aligned} (\exp(x))' &= (\log^{-1})'(x) = \frac{1}{\log'(\log^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\log^{-1}(x)}} \\ &= \log^{-1}(x) = \exp(x). \end{aligned}$$

Por outro lado, seja  $a = \exp(x)$  e  $b = \exp(y)$ , de forma que  $x = \log a$  e  $y = \log b$ . Então:

$$x + y = \log a + \log b = \log(ab),$$

ou seja:

$$\exp(x + y) = ab = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

□

**Corolário 27.8.**

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1.$$

*Demonstração.* Como  $\exp x$  é diferenciável em  $x = 0$  com derivada  $\exp'(0) = \exp(0) = 1$ , a definição de derivada mostra que:

$$1 = \exp'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(0 + h) - \exp(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h}.$$

□

Portanto, temos as seguintes propriedades da exponencial:

- $\exp(0) = 1$  e  $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ ;
- É uma função infinitamente diferenciável, pois temos que  $(\exp x)' = \exp x$ ;
- É uma função estritamente crescente pois a sua derivada é sempre positiva;
- Possui concavidade sempre virada para cima, pois a sua segunda derivada  $(\exp(x))' = \exp(x)$  é sempre negativa.

Finalmente, é simples verificar que:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^+} \log y = -\infty &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0, \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} \log y = +\infty &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty. \end{aligned}$$

Com esta informação recuperamos o gráfico da função exponencial.

\*\*\* GRAFICO \*\*\*\*

**Definição 27.9.** O número  $e$  é o número real:

$$e := \exp(1) \Leftrightarrow 1 = \log(e) = \int_1^e \frac{1}{t} dt.$$

Notem que se  $x = \frac{m}{n}$  é um número racional, então a propriedade (36) da exponencial implica que:

$$e^x = \sqrt[n]{e^m} = \sqrt[n]{\exp(1)^m} = \sqrt[n]{\exp(m)} = \exp\left(\frac{m}{n}\right) = \exp(x).$$

Assim, é natural definir:

**Definição 27.10.** Para todo o número real  $x$ :

$$e^x := \exp(x).$$

É claro que as propriedades que vimos da exponencial implicam as propriedades básicas:

$$\begin{aligned} e^0 &= 1, & e^1 &= e \\ e^{x+y} &= e^x \cdot e^y. \end{aligned}$$

Também podemos definir a potência  $a^x$  para qualquer  $a > 0$  e número real  $x$ , observando que quando  $x = \frac{m}{n}$  é um número racional temos:

$$a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a}.$$

Como esta última expressão faz sentido para todo o número real  $x$ , é natural definir:

**Definição 27.11.** Para todo o número real  $x$ :

$$a^x := e^{x \log a}.$$

**Exercício 27.12.** Mostre que para qualquer  $a > 0$  e números reais  $x$  e  $y$ :

$$\begin{aligned} a^0 &= 1, & a^1 &= a \\ a^{x+y} &= a^x \cdot a^y, \\ (a^x)^y &= a^{xy}. \end{aligned}$$

A função inversa de  $a^x$  é designada por  $\log_a y$ , e chama-se **logaritmo na base  $a$** . É fácil de ver que quando  $y$  é racional, esta definição coincide com a definição habitual. Tal como  $a^x$  pode ser expressa em termos de  $\exp(x)$ , também  $\log_a y$  pode ser expressa em termos de  $\log y$ .

**Exercício 27.13.** Mostre que para qualquer  $y > 0$ :

$$\log_a y = \frac{\log y}{\log a}.$$

**Exercício 27.14.** Calcule as derivadas das funções  $a^x$  e  $\log_a x$ .

## 28. AULA – 30 DE NOVEMBRO DE 2010

**Aproximação por Funções Polinomiais.** Nas últimas duas aulas vimos definições matemáticas precisas das funções exponencial e logaritmo. No entanto, estas definições não nos permitem calcular  $\log x$ ,  $\exp x$ , etc., de forma rápida e eficiente. Nesse sentido, estas “funções elementares” não são elementares de todo! Por outro lado, para uma função polinomial:

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

é muito fácil calcular o seu valor.

Estas observações sugerem uma questão natural: não será possível aproximar uma dada função  $f$  por um polinómio  $p$  de forma que possamos calcular  $f(x)$ , de forma aproximada, calculando  $p(x)$ ?

**Polinómio de Taylor.** Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real que é diferenciável em  $x = a$ . Recorde-mos que a recta tangente ao gráfico de  $f$  em  $a$  é dada pelo gráfico do polinómio do 1º grau:

$$p_{1,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Podemos ver este polinómio  $p_{1,a}(x)$  do 1º grau como uma aproximação de 1ª ordem à nossa função  $f$ , em torno de  $x = a$ .

Suponhamos que, em vez de aproximar  $f(x)$  por um polinómio do 1º grau, queríamos aproximar  $f(x)$  por um polinómio do 2º grau, em torno de  $x = a$ . Vamos escrever este polinómio na forma:

$$p_{2,a}(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2.$$

O seu gráfico é a parábola que melhor aproxima o gráfico de  $f$  em torno de  $x = a$ , como sugerido na seguinte figura:

\*\*\*\* FIGURA \*\*\*\*

Notem que se  $p_{2,a}(x)$  é uma boa aproximação de  $f(x)$  em torno de  $a$ , então os valores  $p_{2,a}(x)$  e de  $f(x)$  em  $a$ , bem como os das suas derivadas, deverão coincidir:

$$\begin{aligned} f(a) &= p_{2,a}(a) = a_0, \\ f'(a) &= p'_{2,a}(a) = a_1, \\ f''(a) &= p''_{2,a}(a) = 2a_2. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que o polinómio  $p_{2,a}(x)$  que melhor aproxima  $f(x)$  em 2ª ordem em torno de  $x = a$  deverá ser dado por:

$$p_{2,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2.$$

É claro que nada nos impede de tentar aproximar  $f$ , em torno de  $a$ , por um polinómio de grau  $n$  qualquer. Nesse caso, escrevendo o polinómio na forma:

$$p_{n,a}(x) = a_0 + a_1(x - a) + \cdots + a_n(x - a)^n,$$

e impondo que  $f(x)$  e  $p_{n,a}(x)$  tenham as mesmas derivadas até ordem  $n$ , obtemos:

$$\begin{aligned} f(a) &= p_{n,a}(a) = a_0, \\ f'(a) &= p'_{n,a}(a) = a_1, \\ f''(a) &= p''_{n,a}(a) = 2a_2, \\ &\vdots \\ f^{(k)}(a) &= p^{(k)}_{n,a}(a) = k!a_k, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(a) &= p^{(n)}_{n,a}(a) = n!a_n. \end{aligned}$$

Concluimos que se  $f$  é diferenciável até ordem  $n$ , o polinómio  $p_{n,a}(x)$  que melhor aproxima  $f(x)$  até ordem  $n$ , em torno de  $x = a$ , deverá ser dado por:

$$(37) \quad p_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

**Definição 28.1.** Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função com derivada de ordem  $n$  em  $a \in D$ . Chama-se **polinómio de Taylor de grau  $n$  de  $f$  em  $a$** , ao polinómio de grau  $n$  dado por (37).

No caso das funções elementares este polinómio é muito simples de calcular.

**Exemplo 28.2.** Seja  $f(x) = e^x$ . Notem que, para qualquer natural  $k$ ,

$$f^{(k)}(x) = e^x.$$

Assim, temos que  $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ , logo o polinómio de Taylor de  $e^x$  de grau  $n$ , em  $x = 0$ , é:

$$p_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

**Exemplo 28.3.** Seja  $f(x) = \log x$ . Vamos calcular o polinómio de Taylor de grau  $n$ , em  $x = 1$ . Um cálculo simples fornece:

$$\begin{aligned} \log'(x) &= \frac{1}{x}, & \log'(1) &= 1; \\ \log''(x) &= -\frac{1}{x^2}, & \log''(1) &= -1; \\ \log'''(x) &= \frac{2}{x^3}, & \log'''(1) &= 2; \\ &\vdots & & \\ \log^{(k)}(x) &= (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k}, & \log^{(k)}(1) &= (-1)^{k-1} (k-1)!. \end{aligned}$$

Logo o polinómio de Taylor de  $\log x$  de grau  $n$ , em  $x = 1$ , é:

$$p_{n,0}(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} = \sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k}.$$

**Exemplo 28.4.** Seja  $f(x) = \text{sen } x$ . Notem que:

$$\begin{aligned} \text{sen}'(x) &= \text{cos}(x), \quad \text{sen}''(x) = \text{cos}'(x) = -\text{sen } x, \\ \text{sen}''' x &= -\text{sen}' x = -\text{cos } x, \quad \text{sen}''''(x) = -\text{cos}' x = \text{sen } x. \end{aligned}$$

Tendo obtido  $\sin x$  de novo, não precisamos de calcular mais derivadas: as derivadas repetem-se num ciclo de 4. Em particular, em  $x = 0$  obtemos:

$$\begin{aligned}\sin(0) &= \sin^{(4)}(0) = \sin^{(8)}(0) = \dots = 0, \\ \sin'(0) &= \sin^{(5)}(0) = \sin^{(9)}(0) = \dots = \cos(0) = 1, \\ \sin''(0) &= \sin^{(6)}(0) = \sin^{(10)}(0) = \dots = -\sin(0) = 0, \\ \sin'''(0) &= \sin^{(7)}(0) = \sin^{(11)}(0) = \dots = -\cos(0) = -1.\end{aligned}$$

Portanto, o polinómio de Taylor de  $\sin x$ , em  $x = 0$ , é:

$$p_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

**Exercício 28.5.** Mostrem que o polinómio de Taylor de  $\cos x$ , em  $x = 0$ , é:

$$p_{2n,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

## 29. AULA – 02 DE DEZEMBRO DE 2010

**Última aula.** Polinómio de Taylor de grau  $n$  de uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável em  $a \in D$  até ordem  $n$ :

$$p_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

caracterizado por

$$p_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad \forall 0 \leq k \leq n.$$

**Polinómio de Taylor (cont.)** O resultado seguinte torna precisa a ideia de que o polinómio de Taylor de grau  $n$  é uma boa aproximação da função até ordem  $n$ :

**Teorema 29.1.** *Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função com derivada de ordem  $n$  em  $a \in D$  e seja  $p_{n,a}(x)$  o seu polinómio de Taylor de grau  $n$  em  $a$ . Então:*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - p_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

*Demonstração.* Notem que se separarmos o termo de grau  $n$  no polinómio de Taylor, obtemos:

$$\frac{f(x) - p_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f(x) - p_{n-1,a}(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{(x-a)^n} = \frac{f(x) - p_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Basta pois mostrar que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - p_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Para isso, vamos aplicar a regra de l'Hôpital: Seja  $h(x) := f(x) - p_{n-1,a}(x)$  o numerador e  $g(x) := (x-a)^n$  o denominador. Deve ser claro que:

- $h^{(k)}(x)$  é contínua em  $a$  para  $0 \leq k \leq n-1$ ;
- $h(a) = h'(a) = \dots = h^{(n-1)}(a) = 0$ , pois  $f(x)$  e  $p_{n-1,a}(x)$  têm as mesmas derivadas em  $a$  até ordem  $n-1$ ;
- $g^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)(x-a)^{n-k}$ .

Podemos pois aplicar a regra de l'Hôpital  $n-1$  vezes, obtendo:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - p_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - p_{n-1,a}^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}.$$

Observem que como  $p_{n-1,a}(x)$  é um polinómio de grau  $n-1$ , a sua derivada de ordem  $n-1$  é constante. De facto,  $p_{n-1,a}^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a)$ , logo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - p_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n} &= \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} \\ &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(a), \end{aligned}$$

onde a última igualdade é simplesmente o facto de que  $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$ .  $\square$

**Resto e Teorema de Taylor.** Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $p_{n,a}(x)$  o seu polinómio de Taylor de grau  $n$ . Definimos o **resto de ordem  $n$**  como sendo a função:

$$R_{n,a}(x) := f(x) - p_{n,a}(x).$$

O resultado seguinte fornece uma expressão para o resto, que facilita na determinação de estimativas para o seu valor.

**Teorema 29.2** (Teorema de Taylor). *Seja  $f : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que a sua derivada de ordem  $n+1$  existe e é uma função integrável. Seja  $a \in [b, c]$ . Então:*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x),$$

onde o resto é dado pela fórmula:

$$R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt, \quad \forall x \in [b, c].$$

*Demonstração.* Para cada  $t \in [b, c]$ , temos que

$$f(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + R_{n,t}(x) = p_{n,t}(x) + R_{n,t}(x).$$

Vamos assumir que  $x$  é fixo e que  $t$  varia. Para isso é conveniente escrever  $S(t) := R_{n,t}(x)$ , de forma que:

$$f(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + S(t).$$

Derivando ambos os lados em relação a  $t$ , obtemos:

$$\begin{aligned} 0 = f'(t) + [f''(t)(x-t) - f'(t)] + \left[ \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - f''(t)(x-t) \right] + \dots + \\ + \left[ \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \right] + S'(t) \end{aligned}$$

Notem que todos os termos se cancelam dois a dois com excepção dos seguintes dois termos:

$$\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + S'(t) = 0.$$

Segue-se que:

$$S(x) - S(a) = \int_a^x S'(t) dt = - \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Como  $S(x) = 0$  e  $S(a) = R_{n,a}(x)$ , obtemos:

$$R_{n,a}(x) = S(a) - S(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

$\square$

**Exemplo 29.3.** A expansão de Taylor com resto do seno, em  $x = 0$ , é dada por:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \int_0^x \frac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!} (x-t)^{2n+1} dt.$$

Atendendo a que

$$|\operatorname{sen}^{(2n+2)}(t)| \leq 1, \forall t,$$

podemos estimar facilmente o resto:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{\operatorname{sen}^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!} (x-t)^{2n+1} dt \right| &\leq \frac{1}{(2n+1)!} \left| \int_0^x (x-t)^{2n+1} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{(2n+1)!} \left| \frac{-(x-t)^{2n+2}}{2n+2} \right|_{t=0}^{t=x} = \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}. \end{aligned}$$

Se, por exemplo, queremos calcular o valor de  $\operatorname{sen} 2$  com um erro inferior a  $0.0001 = 10^{-4}$ , então devemos escolher o natural  $n$  de forma que:

$$\frac{|2|^{2n+2}}{(2n+2)!} < 10^{-4}.$$

Experimentando  $n = 1, 2, \dots$ , vemos que  $n = 5$  funciona. Assim,

$$\operatorname{sen} 2 \simeq 2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + \frac{2^9}{9!} - \frac{2^{11}}{11!} = 0,90929$$

com um erro inferior a 0,0001.

### 30. AULA – 06 DE DEZEMBRO DE 2010

**Sucessões Reais.** Uma sucessão real não é mais do que uma sequência infinita de números reais, como por exemplo

$$2, 21, 3001, 3, 2, 5, \dots$$

Usa-se normalmente o conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais para indexar os termos dessa sequência:

$$u(1) = 2, u(2) = 21, u(3) = 3001, u(4) = 3, u(5) = 2, u(6) = 5, \dots$$

Temos assim a seguinte:

**Definição 30.1.** Uma **sucessão real** é uma função

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n). \end{aligned}$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , designaremos  $u(n)$  por **termo geral** ou **termo de ordem**  $n$  da sucessão  $u$ , representando-o normalmente por  $u_n$ . Para o exemplo acima, escrevemos:

$$u_1 = 2, u_2 = 21, u_3 = 3001, u_4 = 3, u_5 = 2, u_6 = 5, \dots$$

Usaremos qualquer dos símbolos  $u$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(u_n)$  para representar uma mesma sucessão real.

Existem várias maneiras de explicitar exemplos particulares de sucessões reais, como se ilustra de seguida.

**Exemplo 30.2.** Uma sucessão real pode ser definida através de uma fórmula explícita para o seu termo geral. Por exemplo:

$$\begin{aligned} u_n &= 3 && (3, 3, 3, \dots); \\ u_n &= 2 + 3n && (5, 8, 11, \dots); \\ u_n &= 3 \cdot 2^n && (6, 12, 24, \dots). \end{aligned}$$

Há duas classes muito importantes de sucessões reais, cuja definição pode ser feita usando uma fórmula explícita para o seu termo geral.

**Exemplo 30.3. Progressões Aritméticas** – sucessões caracterizadas pelo facto de  $u_{n+1} - u_n =$  constante, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . O seu termo geral é da forma

$$u_n = a + (n - 1)r,$$

onde  $a, r \in \mathbb{R}$  são respectivamente o **primeiro termo** e **razão** da progressão aritmética  $(u_n)$  (notem que a diferença  $u_{n+1} - u_n = r$  é de facto constante). A sucessão  $u_n = 2 + 3n$  do Exemplo 30.2, é uma progressão aritmética, com primeiro termo  $a = 5$  e razão  $r = 3$ .

**Exemplo 30.4. Progressões Geométricas** – sucessões caracterizadas pelo facto de  $u_{n+1}/u_n =$  constante, para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . O seu termo geral é da forma

$$u_n = a \cdot r^{n-1},$$

onde  $a, r \in \mathbb{R}$  são respectivamente o **primeiro termo** e **razão** da progressão geométrica  $(u_n)$  (notem que o quociente  $u_{n+1}/u_n = r$  é de facto constante). A sucessão  $u_n = 3 \cdot 2^n$  do Exemplo 30.2, é uma progressão geométrica, com primeiro termo  $a = 6$  e razão  $r = 2$ .

**Exemplo 30.5.** O termo geral de uma sucessão real pode também ser definido por recorrência. Um exemplo famoso é dado pela **sucessão de Fibonacci**:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 = 1, \\ u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

cuja lista de termos é pois:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$$

**Exercício 30.6.** Defina por recorrência progressões aritméticas e geométricas, com primeiro termo  $a \in \mathbb{R}$  e razão  $r \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 30.7.** Sucessões reais podem também ser definidas por uma regra clara que permita identificar, um a um, todos os seus termos. Um exemplo é a sucessão de todos os números naturais primos, i.e. a sucessão  $(u_n)$  cuja lista de termos é

$$(1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots).$$

Não se conhece uma fórmula em termos de funções elementares que forneça o termo geral desta sucessão.

**Limite de uma Sucessão.** Intuitivamente, dizemos que uma sucessão  $(u_n)$  tem por limite o número real  $a \in \mathbb{R}$  se eventualmente todos os termos da sucessão  $(u_n)$  se aproximam de  $a \in \mathbb{R}$ . De uma forma matematicamente mais precisa, temos a seguinte

**Definição 30.8.** A sucessão real  $(u_n)$  diz-se **convergente** para o número real  $a \in \mathbb{R}$ , ou que possui **limite**  $a$ , se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : (n > N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon).$$

Neste caso escrevemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \quad \text{ou} \quad \lim u_n = a \quad \text{ou ainda} \quad u_n \rightarrow a.$$

A sucessão real  $(u_n)$  diz-se **convergente** para  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ), ou que possui **limite**  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ), se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : (n > N \Rightarrow u_n > \frac{1}{\varepsilon}) \quad (\text{resp. } n > N \Rightarrow u_n < -\frac{1}{\varepsilon}).$$

Nestes casos escrevemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim u_n = \pm\infty \quad \text{ou ainda} \quad u_n \rightarrow \pm\infty.$$

**Exemplo 30.9.** Vamos provar que  $u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ . Suponhamos dado um  $\varepsilon > 0$  arbitrário. Existe um natural  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < \frac{1}{N} < \varepsilon$ . É imediato verificar que

$$(n > N \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon),$$

provando-se assim que de facto

$$(38) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

**Nota 30.10.** Observem que se pensarmos numa sucessão  $(u_n)$  como uma função  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , então a definição de limite de sucessões coincide precisamente com a noção de limite de funções que estudámos anteriormente, i.e., temos que

$$\lim u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u(n).$$

**Proposição 30.11.** *Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função e*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}},$$

*então a sucessão  $u_n := f(n)$  é convergente e  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ .*

*Demonstração.* Exercício. □

Esta proposição reduz muitas vezes o cálculo de limites de sucessões ao cálculo de limite de funções.

**Exemplo 30.12.** Para mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

observamos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \log(1+1/x)} = e^1 = e,$$

pois

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log(1 + 1/x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1 + y)}{y} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{RC}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1/(1+y)}{1} = 1.$$

**Exemplo 30.13.** Seja  $0 < a < 1$ . Para mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0,$$

observamos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \log a} = 0,$$

pois  $\log a < 0$ .

**Exercício 30.14.** Completam este exemplo mostrando que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} \text{não existe, se } a \leq -1, \\ 0, & \text{se } |a| < 1, \\ 1, & \text{se } a = 1, \\ +\infty, & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

A correspondência entre limites de sucessões e limites de funções, leva a que muitas das propriedades dos limites de funções se estendam imediatamente a propriedades de limites de sucessões. Por exemplo, o limite de uma sucessão quando existe é único. Listamos de seguida outras propriedades básicas, que vocês devem também verificar.

**Teorema 30.15** (Limites e Propriedades Algébricas). *Se  $u_n \rightarrow a$ ,  $v_n \rightarrow b$ ,  $w_n \rightarrow c$  com  $c \neq 0$  e  $w_n \neq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , e se  $\alpha \in \mathbb{R}$  é uma constante, então:*

- (i)  $(u_n \pm v_n) \rightarrow a \pm b$  (limite da soma = soma dos limites);
- (ii)  $(u_n \cdot v_n) \rightarrow a \cdot b$  (limite do produto = produto dos limites);
- (iii)  $(u_n/w_n) \rightarrow a/c$  (limite do quociente = quociente dos limites);
- (iv)  $(\alpha \cdot u_n) \rightarrow \alpha \cdot a$ .

**Exemplo 30.16.** Usando as propriedades algébricas do limite, especificadas no Teorema 30.15:

$$\lim \frac{3n+2}{n+1} = \lim \frac{n \cdot (3 + \frac{2}{n})}{n \cdot (1 + \frac{1}{n})} = \lim \frac{3 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{3+0}{1+0} = 3,$$

onde usámos e o facto de que  $\lim \frac{1}{n} = 0$ .

**Teorema 30.17** (Limites e Relação de Ordem). *Sejam  $(u_n)$  e  $(v_n)$  duas sucessões convergentes tais que  $u_n \leq v_n$  para  $n > N$ , então.*

$$\lim u_n \leq \lim v_n.$$

**Exemplo 30.18.** Para as sucessões

$$u_n := \text{sen}(1/n) \text{ e } v_n := \text{sen}(1/n) + 1/n^2$$

temos que  $u_n \leq v_n$ . Logo os seus limites, caso existam, satisfazem  $\lim u_n \leq \lim v_n$ . Na verdade, estas sucessões convergem e podemos calcular facilmente estes limites:

$$\begin{aligned} \lim \text{sen} \left( \frac{1}{n} \right) &= 0, \text{ pois } \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sen} \left( \frac{1}{x} \right) = \text{sen}(0) = 0, \\ \lim \left[ \text{sen} \left( \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n^2} \right] &= 0, \text{ pois } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \text{sen} \left( \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x^2} \right] = \text{sen}(0) + 0 = 0. \end{aligned}$$

Notem que apesar de  $u_n < v_n$  temos  $\lim u_n = \lim v_n = 0$ .

**Teorema 30.19** (Princípio do Encaixe ou da Sucessão Enquadrada). *Sejam  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  e  $(w_n)$  sucessões reais para as quais existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que*

$$n > N \Rightarrow u_n \leq v_n \leq w_n.$$

*Se  $(u_n)$  e  $(w_n)$  são convergentes com  $\lim u_n = a = \lim w_n$ , então  $(v_n)$  também é convergente e  $\lim v_n = a$ .*

**Exemplo 30.20.** Para determinar  $\lim \frac{(-1)^n}{n}$ , observemos que para qualquer  $n \in \mathbb{N}$  tem-se

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Como  $\lim -\frac{1}{n} = 0 = \lim \frac{1}{n}$ , concluímos pelo Princípio do Encaixe que

$$(39) \quad \lim \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

**Limites de sucessões e de funções.** O resultado seguinte estabelece a relação precisa entre limites de sucessões e de funções:

**Teorema 30.21.** *Seja  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Então,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  sse  $\lim f(x_n) = l$  para qualquer sucessão real  $(x_n) \subset D$  tal que  $x_n \rightarrow a$ .*

*Demonstração.* Para mostrarmos  $(\Rightarrow)$ , observamos que a sucessão  $u_n = f(x_n)$  pode ser vista como uma função composta  $u(n) = f(x(n))$ . Pelo resultado sobre limites de funções compostas (Teorema 8.3), como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = a$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ , obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x(n)) = l.$$

Para mostrarmos  $(\Leftarrow)$ , suponhamos por absurdo que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ , para toda a sucessão  $(x_n) \subset D$  com  $x_n \rightarrow a$ , mas que  $l$  não é o limite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow a$ . Então, existe um  $\varepsilon > 0$  tal que para todo o  $\delta > 0$  existe um  $x \in D$  tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{e} \quad |f(x) - l| > \varepsilon.$$

Tomando  $\delta = \frac{1}{n}$ , obtemos para cada  $n \in \mathbb{N}$  um número  $x_n$  tal que

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(x_n) - l| > \varepsilon.$$

Notem que a primeira condição garante que  $x_n \rightarrow a$  e a segunda condição garante que  $l$  não é limite de  $f(x_n)$ , o que contradiz a nossa hipótese.  $\square$

**Exemplo 30.22.** Suponhamos que queríamos calcular o limite:

$$\lim n(e^{\frac{1}{n}} - 1).$$

Podemos recorrer ao Teorema 30.21, observando que:

$$\lim n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

**Exemplo 30.23.** Consideremos a função  $f(x) = \text{sen}(\frac{1}{x})$ . Se tomarmos a sucessão  $u_n = \frac{1}{2\pi n}$  temos que  $\lim u_n = 0$ , e

$$\lim f(u_n) = \lim \text{sen}(2\pi n) = \lim 0 = 0.$$

Por outro lado, para a sucessão  $v_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2}$  também temos que  $\lim v_n = 0$ , mas

$$\lim f(v_n) = \lim \text{sen}(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = \lim \text{sen}(\frac{\pi}{2}) = \lim 1 = 1.$$

Pelo Teorema 30.21, concluímos que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  não existe.

### 31. AULA – 07 DE DEZEMBRO DE 2010

#### Última Aula.

$$\lim u_n = a \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : (n > N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon).$$

**Sucessões Monótonas e Limitadas.** Os resultados que vimos anteriormente permitem calcular os limites de muitas sucessões a partir de manipulações no seu termo geral. No entanto, por vezes, estamos interessados em saber se uma dada sucessão é ou não convergente, sem entrar numa análise detalhada do seu termo geral. Vamos agora estudar critérios gerais que permitem decidir se uma sucessão é convergente.

As seguintes definições são inteiramente análogas ao que se passa com funções (recordem que uma sucessão real  $u = (u_n)$  não é mais que uma função  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ).

**Definição 31.1.** Seja  $(u_n)$  uma sucessão real. Então:

- (i)  $(u_n)$  diz-se **crecente** (resp. **estritamente crescente**) se  $u_n \leq u_{n+1}$  (resp.  $u_n < u_{n+1}$ ) para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .
- (ii)  $(u_n)$  diz-se **decrecente** (resp. **estritamente decrescente**) se  $u_n \geq u_{n+1}$  (resp.  $u_n > u_{n+1}$ ) para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .
- (iii)  $(u_n)$  diz-se **majorada** se existir  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $u_n \leq M$  para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .
- (iv)  $(u_n)$  diz-se **minorada** se existir  $m \in \mathbb{R}$  tal que  $u_n \geq m$  para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

Uma sucessão diz-se **monótona** (resp. **estritamente monótona**) se for crescente ou decrescente (resp. estritamente crescente ou decrescente). Uma sucessão diz-se **limitada** se for majorada e minorada.

**Exercício 31.2.** Mostre que se uma sucessão  $(u_n)$  é convergente, então é limitada.

Notem que uma sucessão limitada pode não ser convergente: a sucessão  $u_n = (-1)^n$  é claramente limitada, mas não é convergente. No entanto, temos o seguinte resultado:

**Teorema 31.3.** *Seja  $(u_n)$  uma sucessão real.*

(i) *Se  $(u_n)$  é crescente e majorada então é convergente e*

$$\lim u_n = \sup \{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) *Se  $(u_n)$  é decrescente e minorada então é convergente e*

$$\lim u_n = \inf \{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

*Em particular, toda a sucessão monótona e limitada é convergente.*

*Demonstração.* Faremos o caso em que  $(u_n)$  é crescente e majorada (o caso em que  $(u_n)$  é decrescente e minorada é completamente análogo).

Como a sucessão  $(u_n)$  é majorada, temos que existe

$$a = \sup \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Queremos portanto provar que

$$u_n \rightarrow a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : (n > N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon).$$

Seja então dado um  $\varepsilon > 0$  arbitrário. Pela propriedade do supremo, existe algum  $u_N$  tal que  $a - \varepsilon < u_N \leq a$ . Como  $(u_n)$  é crescente, vemos que para todo o  $n > N$ :

$$u_N \leq u_n \leq a \Rightarrow a - \varepsilon < u_n \leq a.$$

Temos então que

$$|u_n - a| < \varepsilon \text{ para todo o } n > N,$$

como se pretendia mostrar. □

**Nota 31.4.** Decidir se uma dada sucessão monótona é ou não limitada pode ser um problema difícil. Por exemplo, tentem decidir se a seguinte sucessão crescente é ou não majorada:

$$1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}, \dots$$

Veremos qual é a resposta numa das próximas aulas.

**Séries Numéricas.** O tema que agora vamos iniciar é motivado pelo seguinte problema: dada uma sucessão real  $(u_k)$ , determinar quando é que é possível atribuir significado preciso à *soma de todos os elementos da sucessão*  $(u_k)$ :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

Não definimos ainda uma soma com um número infinito de parcelas. Podemos no entanto definir as **somas parciais**:

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1, \\ s_2 &= u_1 + u_2, \\ s_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ &\vdots \\ s_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

e definir a soma de todos os termos da sucessão como o  $\lim s_n$ . É claro que este limite pode ou não existir.

**Definição 31.5.** Uma sucessão  $(u_k)$  diz-se **somável** se a sucessão  $(s_n)$  das somas parciais:

$$s_n := u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k,$$

é convergente com limite finito. Usaremos a notação

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \equiv u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

a que chamamos **série**. Quando a sucessão  $(u_k)$  é somável dizemos que a **série é convergente** e que a sua soma é  $\lim s_n$ . Caso contrário dizemos que a **série é divergente**.

**Exemplos de Séries.****Exemplo 31.6.** Consideremos a série:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Será que esta série diverge ou converge? Para isso consideramos a sucessão das somas parciais:

$$\begin{aligned} s_0 &= 1, \\ s_1 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}, \\ s_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}, \\ &\vdots \\ s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}. \end{aligned}$$

Podem verificar esta última fórmula por indução. Como temos:

$$\lim s_n = \lim \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} = \lim \left( 2 - \frac{1}{2^n} \right) = 2,$$

concluimos que a série é convergente e a sua soma é igual a 2.

**Exemplo 31.7.** Consideremos a série:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}.$$

Esta série diverge, pois a sucessão das somas parciais é dada por:

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, \\ s_2 &= 1 - 1 = 0, \\ s_3 &= 1 - 1 + 1 = 1, \\ s_4 &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

que é uma sucessão divergente.

**Exemplo 31.8** (Séries Geométricas). Suponhamos que  $(u_k)$  é uma progressão geométrica com primeiro termo igual a 1 e razão  $r \in \mathbb{R}$ , i.e.,  $u_k := r^k$ ,  $(k \in \mathbb{N}_0)$ . A série correspondente é:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} r^k.$$

Séries deste tipo são designadas por **séries geométricas**. A sucessão das somas parciais é dada por (vejam o Exemplo 4.1):

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \text{ e } r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Logo, se  $|r| < 1$  temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}.$$

Portanto a série é convergente quando  $|r| < 1$ , e a sua soma é:

$$(40) \quad \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}, \quad (|r| < 1).$$

O Exemplo 31.6 corresponde ao caso  $r = 1/2$ .

**Nota 31.9.** Notem que se  $|r| < 1$  também temos:

$$(41) \quad \sum_{k=1}^{\infty} r^k = \sum_{k=1}^{\infty} r \cdot r^{k-1} = r \sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} = r \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{r}{1-r}.$$

### 32. AULA – 09 DE DEZEMBRO DE 2010

**Operações algébricas sobre séries.** É um exercício muito simples mostrar, a partir da definição, as seguintes operações algébricas sobre séries convergentes:

**Proposição 32.1.** *Sejam  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  e  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  séries convergentes e  $c \in \mathbb{R}$ . Então, as séries  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$  e  $\sum_{k=1}^{\infty} (ca_k)$  também são convergentes e*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \\ \sum_{k=1}^{\infty} (c \cdot a_k) &= c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \end{aligned}$$

**Exemplo 32.2.** Consideremos a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$$

Tendo em conta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3}{3^n} = 6 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

vemos que a série é geométrica com razão  $r = 1/3$ . Concluimos assim que se trata de uma série convergente, pois  $|r| = 1/3 < 1$ , e podemos usar a fórmula (41) para calcular a sua soma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 6 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 6 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

**Condição necessária para convergência.** Em geral, dada uma série, é difícil calcular a sucessão das somas parciais e verificar se converge ou não. Precisamos pois de testes que permitam decidir facilmente se uma série converge ou diverge.

**Teorema 32.3** (Condição necessária para convergência).

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ convergente} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

*Demonstração.* Sendo a série convergente, sabemos então que a sucessão de somas parciais

$$s_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

é convergente com limite finito:  $\lim s_n = l \in \mathbb{R}$ . Temos então que

$$\begin{aligned} 0 = l - l &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n u_k - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n. \end{aligned}$$

□

**Nota 32.4.** A implicação contrária à especificada no Teorema 32.3 não é verdadeira. Por exemplo a sucessão  $u_n = \frac{1}{n}$  converge para 0, mas a série correspondente é a chamada **série harmónica**  $\sum_k 1/k$  que, como veremos na próxima aula, é divergente.

**Nota 32.5.** O Teorema 32.3 pode ser usado como **critério de divergência** para séries numéricas, pois o seu resultado é logicamente equivalente ao seguinte:

$$u_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum_k u_k \text{ divergente.}$$

Por exemplo, no caso das séries geométricas, tendo em conta que

$$r^n \not\rightarrow 0 \text{ quando } |r| \geq 1$$

e que séries geométricas são convergente quando  $|r| < 1$ , permite-nos concluir que

$$(42) \quad \sum_{k=1}^{\infty} r^k \text{ é } \begin{cases} \text{convergente,} & \text{se } |r| < 1; \\ \text{divergente,} & \text{se } |r| \geq 1. \end{cases}$$

**Séries de Termos Não-Negativos.** Séries de termos não-negativos (STNN) são séries da forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \text{ com } a_k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

**Proposição 32.6.** Uma STNN  $\sum_k a_k$  é convergente se e só se a sua sucessão de somas parciais  $(s_n)$  for majorada.

*Demonstração.* Por definição, a série é convergente se e só se a sucessão das somas parciais  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  for convergente. Como

$$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0,$$

vemos que a sucessão  $(s_n)$  é monótona crescente. Logo, segue dos Teoremas 31.2 e 31.3 que  $(s_n)$  é convergente se e só se for majorada.  $\square$

Este resultado não é muito útil na prática, pois pode ser difícil verificar se a sucessão de somas parciais é ou não majorada. Vejam o exemplo da Nota 31.4, que não é mais do que a sucessão de somas parciais da série harmónica  $\sum_k 1/k$  referida na Nota 32.4.

### Critério da Comparação para STNN.

**Teorema 32.7** (Critério Geral de Comparação para STNN). *Sejam  $(a_k)$  e  $(b_k)$  duas sucessões reais tais que*

$$0 \leq a_k \leq b_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

*Então:*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ converge} &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ converge;} \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ diverge} &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ diverge.} \end{aligned}$$

*Demonstração.* Sejam  $(s_n)$  e  $(t_n)$  as sucessões de somas parciais das séries dadas, i.e.

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{ e } t_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Temos naturalmente que

$$0 \leq a_k \leq b_k, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq s_n \leq t_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Usando a Proposição 32.6, podemos então concluir que:

- $\sum_k b_k$  converge  $\Rightarrow (t_n)$  majorada  $\Rightarrow (s_n)$  majorada  $\Rightarrow \sum_k a_k$  converge.
- $\sum_k a_k$  diverge  $\Rightarrow (s_n)$  não-majorada  $\Rightarrow (t_n)$  não-majorada  $\Rightarrow \sum_k b_k$  diverge.

□

**Nota 32.8.** Nas condições do Teorema 32.7, ou seja assumindo que  $0 \leq a_k \leq b_k$  para todo o  $k \in \mathbb{N}$ , as implicações contrárias às especificadas não são verdadeiras, i.e.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ converge} \not\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ converge}$$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ diverge} \not\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ diverge.}$$

**Exemplo 32.9.** O critério de comparação para STNN permite, por vezes, mostrar a convergência de uma série cujo termo geral é muito complicado, como no seguinte exemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \operatorname{sen}^3(n+1)}{3^{n-1} + n^2}.$$

Como temos:

$$0 \leq \frac{1 + \operatorname{sen}^3(n+1)}{3^{n-1} + n^2} \leq \frac{2}{3^{n-1}},$$

e já sabemos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$  converge (vejam o Exemplo 32.2), concluímos que a série original converge. Pensem no que é que podemos dizer sobre a soma desta série.

### 33. AULA – 13 DE DEZEMBRO DE 2010

#### Critério da Comparação para STNN (cont.)

**Teorema 33.1** (Outro Critério de Comparação para STNN). *Sejam  $(a_n)$  e  $(b_n)$  duas sucessões reais de termos positivos, tais que*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = L \text{ com } 0 < L < +\infty.$$

*Então, as séries  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  são da mesma natureza, i.e., ou ambas convergem ou ambas divergem.*

*Demonstração.* A hipótese

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = L \text{ com } 0 < L < +\infty,$$

garante que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > N \Rightarrow \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < 2L \Rightarrow \frac{L}{2} \cdot b_n < a_n < 2L \cdot b_n.$$

Basta agora aplicar o Critério Geral de Comparação do Teorema 32.7 a estas desigualdades. □

**Exercício 33.2.** O que é que se pode dizer quando  $L = 0$  ou  $L = +\infty$ ?

**Exemplo 33.3.** Queremos determinar a natureza da série

$$\sum \frac{1}{3^n - 2^n}.$$

Tendo em conta a ordem de grandeza do termo geral desta série, é natural compará-la com a série geométrica  $\sum 1/3^n$ . De facto, como

$$\lim \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n - 2^n}} = \lim \frac{3^n - 2^n}{3^n} = 1 - \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - 0 = 1 \quad \text{e} \quad 0 < 1 < +\infty,$$

sabemos pelo Teorema 33.1 que as séries são da mesma natureza. Como a série geométrica  $\sum \frac{1}{3^n}$  de razão  $r = 1/3 < 1$  converge, (Exemplo 31.8), concluímos que a série  $\sum \frac{1}{3^n - 2^n}$  também converge.

**Cr terio da Razão para STNN.**

**Teorema 33.4** (Cr terio da Razão para STNN). *Seja  $\sum_n a_n$  uma série numérica, com  $a_n > 0$  e tal que*

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Então:

- (a) se  $r < 1$  a série  $\sum_n a_n$  converge.
- (b) se  $r > 1$  a série  $\sum_n a_n$  diverge.

*Demonstra o.* Suponhamos que  $r < 1$ . Se escolhermos  $r < s < 1$ , existe um  $N \in \mathbb{N}$  tal que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < s, \quad \forall n \geq N.$$

Logo:

$$a_{N+k} \leq s a_{N+k-1} \leq s^2 a_{N+k-2} \leq \dots \leq s^k a_N.$$

Como  $s < 1$  a série geométrica  $\sum_k a_N s^k = a_N \sum_k s^k$  converge. Pelo Cr terio Geral de Compara o para STNN, concluímos que a série  $\sum_k a_k$  também converge.

Suponhamos agora que  $r > 1$ . Neste caso, se escolhermos  $1 < s < r$ , existe um  $N \in \mathbb{N}$  tal que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > s, \quad \forall n \geq N.$$

Isto mostra que:

$$a_{N+k} \geq s a_{N+k-1} \geq s^2 a_{N+k-2} \geq \dots \geq s^k a_N \geq a_N,$$

donde  $\lim a_k \neq 0$  e a série  $\sum_k a_k$  diverge. □

**Exemplo 33.5.** Seja  $r > 0$  e suponha-se que queremos determinar a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!}.$$

Fazendo  $a_n = r^n/n!$ , temos então que

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{r^n}{n!}} = \frac{r}{n+1} = 0 < 1.$$

Concluímos pelo Cr terio da Razão (Teorema 33.4) que, qualquer que seja  $r > 0$ , a série dada   convergente.

**Nota 33.6.** O cr terio da razão nada diz quando  $r = 1$ . Por exemplo, para a série harm nica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  e para a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  temos, em ambos os casos,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ . Como veremos de seguida, a série harm nica diverge enquanto que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge.

**Cr terio Integral para STNN.**

**Teorema 33.7** (Cr terio Integral para STNN). *Seja  $f : [1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma fun o positiva decrescente. Então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  converge se e só se existe e   finito o limite:*

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b f(x) dx.$$

*Demonstra o.* Primeiro observamos que o limite  $\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b f(x) dx$  existe e   finito se, e só se, a série

$$\int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx + \dots$$

converge. Deixamos como exercício simples verificar que, como  $f$    positiva e decrescente, temos:

$$f(n+1) < \int_n^{n+1} f(x) dx < f(n).$$

O resultado segue-se do Cr terio Geral de Compara o para STNN. □

**Exemplo 33.8** (Séries de Dirichlet). Pretendemos estudar a convergência das chamadas **séries de Dirichlet**, i.e séries da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \text{ com } p \in \mathbb{R}_+.$$

Pelo Critério Integral para STNN a convergência desta série é equivalente à existência finita do integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx.$$

Observando que:

$$\int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1} \left(1 - \frac{1}{b^{p-1}}\right), & \text{se } p \neq 1, \\ \log b, & \text{se } p = 1, \end{cases} \Rightarrow \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} +\infty, & \text{se } 0 < p \leq 1, \\ \frac{1}{p-1}, & \text{se } p > 1, \end{cases}$$

vemos que o integral existe e é finito se, e só se,  $p > 1$ . Portanto, a série de Dirichlet

$$(43) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ é } \begin{cases} \text{divergente,} & \text{se } 0 < p \leq 1; \\ \text{convergente,} & \text{se } p > 1. \end{cases}$$

Considerando o caso particular  $p = 1$ , obtemos finalmente que de facto

$$\text{a série harmónica } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ é divergente.}$$

Séries de Dirichlet são bastante úteis para determinar por comparação a natureza de muitas outras STNN.

**Exemplo 33.9.** Queremos determinar a natureza da série

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

Tendo em conta a ordem de grandeza do termo geral desta série, é natural compará-la com a série harmónica  $\sum 1/n$ . De facto, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n}}{n} = 1 \text{ e } 0 < 1 < +\infty,$$

sabemos pelo Teorema 33.1 que as séries são da mesma natureza. Como a série harmónica  $\sum \frac{1}{n}$  diverge, podemos concluir que a série  $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$  também diverge.

34. AULA – 14 DE DEZEMBRO DE 2010

**Convergência Simples e Absoluta.** Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é uma série em que  $a_n$  assume valores positivos e negativos, então podemos considerar a série dos módulos  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ , que é uma STNN. O resultado seguinte mostra que este procedimento é útil:

**Teorema 34.1.** Se  $\sum_n |a_n|$  converge, então  $\sum_n a_n$  também converge e

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

*Demonstração.* Para a demonstração, introduzimos a seguinte notação. Se  $a \in \mathbb{R}$  é um número real, então

$$a^+ = \max\{a, 0\} = \text{parte positiva de } a;$$

$$a^- = -\min\{a, 0\} = \text{parte negativa de } a.$$

É imediato verificar que

$$a = a^+ - a^- \quad |a| = a^+ + a^-, \quad a^+ = \frac{|a| + a}{2} \quad \text{e} \quad a^- = \frac{|a| - a}{2}.$$

Em particular, temos a desigualdade:

$$0 \leq a^+, a^- \leq |a|.$$

Esta desigualdade, aplicada à sucessão  $(a_n)$ , em conjunto com o critério geral de comparação, mostra que se  $\sum_n |a_n|$  é convergente então  $\sum_n a_n^+$  e  $\sum_n a_n^-$  também são séries convergentes. Como

$$\sum_n a_n = \sum_n (a_n^+ - a_n^-) = \sum_n a_n^+ - \sum_n a_n^-,$$

podemos concluir que  $\sum_n a_n$  converge.

Relativamente à sua soma, temos que

$$\begin{aligned} \left| \sum_n a_n \right| &= \left| \left( \sum_n a_n^+ \right) - \left( \sum_n a_n^- \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_n a_n^+ \right| + \left| \sum_n a_n^- \right| && \text{(pela desig. triangular)} \\ &= \sum_n (a_n^+ + a_n^-) = \sum_n |a_n|, && \text{(porque } a_n^+, a_n^- \geq 0). \end{aligned}$$

□

**Exemplo 34.2.** Consideremos a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

A série de módulos correspondente é a série de Dirichlet  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  que converge. Pelo Teorema 34.1, concluímos que a série original converge.

**Definição 34.3.** Uma série  $\sum_n b_n$  diz-se

- (i) **absolutamente convergente** se a correspondente série de módulos  $\sum_n |b_n|$  é convergente.
- (ii) **simplesmente convergente** se é convergente, mas a correspondente série de módulos  $\sum_n |b_n|$  é divergente.

**Séries Alternadas.** O Teorema 34.1 mostra que uma série absolutamente convergente é convergente. O recíproco não é verdadeiro. Para construirmos um exemplo vamos recorrer ao seguinte critério de convergência para **séries alternadas**, i.e., séries em que termos consecutivos trocam de sinal.

**Teorema 34.4** (Critério de Leibniz). *Suponha-se que:*

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0,$$

e que:

$$\lim a_n = 0$$

(de forma abreviada, escrevemos  $a_n \searrow 0$ ). Então a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

converge.

*Demonstração.* Vejam no Spivak. □

**Exemplo 34.5.** Como

$$a_n = \frac{1}{n} \searrow 0,$$

concluimos pelo Critério de Leibniz que a **série harmónica alternada**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

é convergente. A série dos módulos correspondente é a série harmónica que diverge. Portanto, a série harmónica alternada é simplesmente convergente.

Os seguintes dois resultados ilustram bem a diferença entre o comportamento das séries absolutamente convergentes e o das séries simplesmente convergentes.

**Teorema 34.6.** *Qualquer série obtida por reordenação dos termos de uma série absolutamente convergente é também absolutamente convergente, com soma igual à soma da série original.*

**Teorema 34.7.** (Riemann) *Sejam  $\sum_n b_n$  uma série simplesmente convergente e  $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$  arbitrário. Então, existem séries obtidas por reordenação de  $\sum_n b_n$  com soma igual a  $\beta$ .*

Podem encontrar as demonstrações destes resultados no Spivak.

**Séries de potências.**

**Definição 34.8.** Chama-se **série de potências** centrada em  $a \in \mathbb{R}$  à série

$$(44) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots .$$

O seu **domínio de convergência** é o conjunto

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ é convergente} \right\} .$$

**Exemplo 34.9.** Consideremos a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x-1)^n .$$

Esta série é de facto uma série geométrica de razão  $r = (x-1)/2$ . Sabemos então que a série é absolutamente convergente quando:

$$\left| \frac{x-1}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow |x-1| < 2 \Leftrightarrow x \in ]-1, 3[ ,$$

e também que a série é divergente quando:

$$\left| \frac{x-1}{2} \right| \geq 1 \Leftrightarrow |x-1| \geq 2 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[ .$$

Assim, neste exemplo, o domínio de convergência é:  $D = ]-1, 3[$ .

**Teorema 34.10.** *Dada uma série de potências  $\sum_n a_n(x-a)^n$ , existe um número  $0 \leq R \in \overline{\mathbb{R}}$ , designado por **raio de convergência**, tal que:*

- (i) a série é absolutamente convergente quando  $|x-a| < R$ , i.e., para  $x \in ]a-R, a+R[$ ;
- (ii) a série é divergente quando  $|x-a| > R$ , i.e., para  $x \in ]-\infty, a-R[ \cup ]a+R, +\infty[$ ;
- (iii) a série pode convergir ou divergir quando  $x = a+R$  e  $x = a-R$ .

O raio de convergência é dado por

$$(45) \quad R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| ,$$

desde que este limite exista em  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Nota 34.11.** Este resultado diz-nos que o domínio de convergência de uma série de potências  $\sum_n a_n(x-a)^n$  é sempre um intervalo centrado em  $a$ , também designado por *intervalo de convergência*, da forma

$$]a-R, a+R[ \quad \text{ou} \quad [a-R, a+R] \quad \text{ou} \quad ]a-R, a+R] \quad \text{ou} \quad [a-R, a+R[.$$

Quando  $R = 0$  o domínio de convergência da série de potências é  $D = \{a\}$ , como acontece no Exemplo 35.1. Quando  $R = +\infty$  o domínio de convergência da série de potências é  $D = \mathbb{R}$ , como acontece no Exemplo 35.2. No Exemplo 34.9 o raio de convergência é  $R = 2$  e o domínio de convergência é da forma  $D = ]a-R, a+R[$ .

A demonstração do Teorema 34.10 será feita com base no seguinte lema.

**Lema 34.12.** *Suponhamos que existe um número real  $0 \neq y \in \mathbb{R}$  tal que a série  $\sum_n a_n y^n$  é convergente. Então, a série de potências  $\sum_n a_n x^n$  é absolutamente convergente para qualquer  $x \in \mathbb{R}$  com  $|x| < |y|$ .*

*Demonstração do Lema 34.12.* O Teorema 32.3 diz-nos que

$$\sum_n a_n y^n \text{ convergente} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n y^n = 0,$$

pelo que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq N \Rightarrow |a_n y^n| < 1.$$

Logo, para  $n \geq N$  temos que

$$|a_n x^n| = |a_n y^n| \cdot \left| \frac{x}{y} \right|^n < \left| \frac{x}{y} \right|^n.$$

Assumindo que  $|x| < |y|$ , temos que a série geométrica de razão  $r = |x/y| < 1$  é convergente. Podemos então concluir, pelo critério de comparação, que a série  $\sum_n |a_n x^n|$  é convergente, i.e., a série de potências  $\sum_n a_n x^n$  é absolutamente convergente.  $\square$

*Demonstração do Teorema 34.10.* Substituindo  $(x-a)$  por  $x$ , podemos assumir que  $a = 0$ . Consideremos então o conjunto  $A \subset \mathbb{R}^+$  definido por

$$A = \left\{ r \in \mathbb{R}^+ : r = |x| \text{ e } \sum_n a_n x^n \text{ é convergente} \right\}.$$

Tem-se imediatamente que:

- se  $A = \emptyset$  então  $R = 0$  satisfaz as condições especificadas no enunciado do teorema;
- se  $A$  não é majorado então o Lema 34.12 garante que  $R = +\infty$  satisfaz as condições especificadas no enunciado do teorema.

Suponhamos agora que  $A$  é não-vazio e majorado, e seja  $R = \sup A \in \mathbb{R}$ . Então:

- $R > 0$  porque  $R \geq r > 0$  para qualquer  $r \in A$ ;
- se  $|x| > R$  então a série  $\sum_n a_n x^n$  diverge, porque neste caso  $r = |x| \notin A$ ;
- se  $|x| < R$  então a série  $\sum_n a_n x^n$  converge absolutamente, porque neste caso existe  $r \in A$  com  $|x| < r < R$  e podemos então usar o Lema 34.12.
- o Exemplo 35.3 abaixo, mostra que a série pode ser tanto convergente como divergente quando  $|x| = R$ .

Isto mostra que  $R \in \mathbb{R}$  satisfaz as condições especificadas no enunciado do teorema.

Finalmente, suponhamos que o limite (45) existe. Vamos aplicar o critério da razão à STNN  $\sum_n b_n := \sum_n |a_n x^n|$ . Para isso, calculamos

$$r = \lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim \frac{|a_{n+1}| |x|}{|a_n|} = |x| \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

e temos que:

(i) A série  $\sum_n |a_n x^n|$  converge se  $r < 1$ , i.e., se:

$$|x| \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Leftrightarrow |x| < \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|;$$

(ii) A série  $\sum_n |a_n x^n|$  diverge se  $r > 1$ , i.e., se:

$$|x| \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Leftrightarrow |x| > \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|;$$

Concluimos que o raio de convergência da série  $\sum_n a_n x^n$  é dado por (45).  $\square$

### 35. AULA – 16 DE DEZEMBRO DE 2010

**Séries de potências (cont.)** Por simplicidade, vamos concentrar-nos sobretudo em séries de potências centradas em 0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

**Exemplo 35.1.** Consideremos a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n.$$

Podemos calcular o seu raio de convergência pela fórmula (45):

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0.$$

Assim, neste exemplo, o domínio de convergência é apenas o ponto onde a série está centrada, i.e.  $D = \{0\}$ .

**Exemplo 35.2.** Consideremos a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Calculando o seu raio de convergência pela fórmula (45):

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \lim(n+1) = +\infty,$$

concluimos que esta série de potências é absolutamente convergente para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ . Este é assim um exemplo em que o domínio de convergência é  $D = \mathbb{R}$ .

**Exemplo 35.3.** Pretende-se determinar o conjunto dos pontos  $x \in \mathbb{R}$  onde a série de potências

$$\sum_n \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n} = \sum_n \frac{1}{(n+1)2^n} \cdot (x+3)^n$$

é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente.

Trata-se de uma série de potências centrada em  $x = -3$  com coeficientes  $a_n = \frac{1}{(n+1)2^n}$ . Podemos calcular o seu raio de convergência pela fórmula (45):

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{1}{(n+1)2^n} \cdot \frac{(n+2)2^{n+1}}{1} = \lim \frac{n+2}{n+1} \cdot 2 = 2.$$

Temos então que a série de potências é absolutamente convergente para

$$|x+3| < 2 \Leftrightarrow -2 < x+3 < 2 \Leftrightarrow -5 < x < -1 \Leftrightarrow x \in ]-5, -1[ ,$$

e é divergente para

$$|x+3| > 2 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -5[ \cup ]-1, +\infty[ .$$

Falta ver o que se passa quando  $x = -5$  e  $x = -1$ . Quando  $x = -5$  temos que

$$\left( \sum_n \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n} \right)_{x=-5} = \sum_n \frac{(-5+3)^n}{(n+1)2^n} = \sum_n \frac{(-2)^n}{(n+1)2^n} = \sum_n \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Trata-se de uma série alternada com  $a_n = \frac{1}{n+1} \searrow 0$ , pelo que o Critério de Leibniz (Teorema 34.4) garante a sua convergência. A correspondente série de módulos

$$\sum_n \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| = \sum_n \frac{1}{n+1}$$

é claramente da mesma natureza que a série harmónica  $\sum_n 1/n$ , logo divergente. Concluimos assim que a série de potências é simplesmente convergente para  $x = -5$ .

Quando  $x = -1$  temos que

$$\left( \sum_n \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n} \right)_{x=-1} = \sum_n \frac{(-1+3)^n}{(n+1)2^n} = \sum_n \frac{(2)^n}{(n+1)2^n} = \sum_n \frac{1}{n+1},$$

que, como já vimos, é uma série divergente. Logo, a série de potências é divergente para  $x = -1$ .

Resumindo: o domínio de convergência é  $D = [-5, -1[$ , a série converge absolutamente em  $] -5, -1[$  e converge simplesmente em  $x = -5$ .

**Séries de Taylor.** Um série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  determina uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $D$  é o domínio de convergência da série de potências:

$$(46) \quad f(x) := a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad (x \in D).$$

Esta função tem uma natureza muito especial, que se deve ao seguinte resultado:

**Teorema 35.4.** *A função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definida pela série de potências (46) é diferenciável em qualquer ponto do interior de  $D$ . A sua derivada é dada por diferenciação termo-a-termo:*

$$(47) \quad f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-a)^{n-1}, \quad (x \in \text{int } D).$$

*Demonstração.* A demonstração deste resultado recorre ao conceito de convergência (uniforme) de sucessões de funções. Por falta de tempo, não poderemos discutir esta noção. Podem encontrar uma discussão detalhada no Capítulo 24 do Spivak.  $\square$

O raio de convergência da série (47) é igual ao raio de convergência da série original (46). Podemos, então, diferenciar novamente e concluir que a função  $f$  tem derivada de segunda ordem, em qualquer ponto do interior de  $D$ . A segunda derivada é dada pela série:

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x-a) + 3 \cdot 4a_4(x-a)^2 \dots = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1)(x-a)^{n-2} \quad (x \in \text{int } D).$$

É claro que podemos continuar este procedimento, concluindo que:

**Corolário 35.5.** *Se uma função  $f$  é dada por uma série de potências então possui derivadas de todas as ordens em qualquer ponto do interior do domínio de convergência  $D$ .*

Notem que a derivada de ordem  $k$  é dada pela expressão:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-k) \cdot (x-a)^{n-k}, \quad (x \in \text{int } D).$$

Calculando ambos os lados em  $x = a$ , obtemos:

$$f^{(k)}(a) = a_k \cdot k! \Leftrightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

e, portanto, concluimos que:

**Corolário 35.6.** Se uma função  $f$  é dada por uma série de potências centrada em  $x = a$  e com domínio de convergência  $D$ , então essa série é dada por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n, \quad (x \in \text{int } D).$$

**Definição 35.7.** Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função com derivada de qualquer ordem  $n$  em  $a \in D$ . Chama-se **série de Taylor de  $f$  em  $a$**  à série de potências:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Assim como uma série de potências é o limite quando  $n \rightarrow \infty$  de polinómios de grau  $n$ , uma série de Taylor é o limite quando  $n \rightarrow \infty$  de polinómios de Taylor de grau  $n$  (cf. Definição 28.1 e exemplos seguintes).

Tendo em conta que, à medida que aumenta o grau do polinómio de Taylor de uma função num ponto  $a$ , melhor é a aproximação que esse polinómio faz da função numa vizinhança de  $a$ , é natural fazermos a seguinte pergunta: quando é que a série de Taylor de uma função num ponto  $a$  é igual à própria função numa vizinhança de  $a$ ? O Teorema de Taylor (Teorema 29.2) diz-nos que

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_{n,a}(x) \quad \text{com} \quad R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt,$$

Isto é o mesmo que dizer que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt = 0 \Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

É fácil verificar a condição anterior para as funções exponencial, seno e coseno, no ponto  $a = 0$  e qualquer  $x \in \mathbb{R}$ . Temos assim que:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R}); \\ \text{sen } x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R}); \\ \text{cos } x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

A fórmula da soma de uma série geométrica (40), diz-nos que

$$(48) \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (|x| < 1).$$

Os exemplos seguintes mostram como se pode usar esta série de Taylor (verifiquem que se trata de facto da série de Taylor da função  $1/(1-x)$ ) para obter as séries de Taylor das funções  $\log(1+x)$  e  $\arctan x$ , no ponto  $a = 0$ .

**Exemplo 35.8.** Recorrendo à série de Taylor (48), temos que:

$$(49) \quad \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$$

desde que  $|-x| < 1$ , ou seja  $x \in ]-1, 1[$ . De facto,  $R = 1$  é o raio de convergência desta série de potências (verifiquem!). Concluímos pois que a função  $\frac{1}{1+x}$  é representada por uma série de potências para  $|x| < 1$ .

Primitivando a série (49), obtemos a série:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} =: f(x),$$

que também tem raio de convergência  $R = 1$  (verifiquem!). Assim, obtemos uma função  $f(x)$ , definida e diferenciável para  $|x| < 1$ , cuja derivada é  $\frac{1}{1+x}$ . Como a função  $\log(1+x)$  também tem derivada  $\frac{1}{1+x}$ , concluímos que:

$$\log(1+x) = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (|x| < 1),$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante. Para determinar  $C$ , calculamos ambos os lados em  $x = 0$  obtendo:

$$\log(1) = C + 0 \Rightarrow C = 0.$$

Concluímos que a função  $\log(1+x)$  admite uma expansão em série de potências, válida para  $|x| < 1$ , dada por:

$$(50) \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad (|x| < 1).$$

Esta é a expansão em série de Taylor da função  $\log(1+x)$  em torno de  $a = 0$ , como também podem verificar directamente calculando as derivadas de  $\log(1+x)$  em  $x = 0$ .

**Exemplo 35.9.** Recorrendo à série de Taylor (48), temos que:

$$(51) \quad \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

desde que  $x^2 < 1$ , ou seja  $x \in ]-1, 1[$ . De facto,  $R = 1$  é o raio de convergência desta série de potências (verifiquem!). Concluímos pois que a função  $\frac{1}{1+x^2}$  é representada por uma série de potências para  $|x| < 1$ .

Primitivando a série (51), obtemos a série:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} =: f(x),$$

que também tem raio de convergência  $R = 1$  (verifiquem!). Assim, obtemos uma função  $f(x)$ , definida e diferenciável para  $|x| < 1$ , cuja derivada é  $\frac{1}{1+x^2}$ . Como a função  $\arctan x$  também tem derivada  $\frac{1}{1+x^2}$ , concluímos que:

$$\arctan x = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (|x| < 1),$$

onde  $C \in \mathbb{R}$  é uma constante. Para determinar  $C$ , calculamos ambos os lados em  $x = 0$  obtendo:

$$\arctan 0 = C + 0 \Rightarrow C = 0.$$

Concluímos que a função  $\arctan x$  admite uma expansão em série de potências, válida para  $|x| < 1$ , dada por:

$$(52) \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (|x| < 1).$$

Esta é a expansão em série de Taylor da função  $\arctan x$  em torno de  $x = 0$ . Notem que o cálculo directo da série de Taylor, através do cálculo das derivadas de  $\arctan x$  em  $x = 0$ , é bastante mais trabalhoso (experimentem!).

**Nota 35.10.** A mesma técnica que utilizámos neste exemplo mostra que uma série de potências pode ser integrada termo-a-termo, resultando daí uma série de potências com o mesmo raio de convergência.

Uma função que pode ser representada por uma série de potências chama-se uma **função analítica**. O estudo das funções analíticas é uma parte da *Análise Complexa*, que vocês estudarão na cadeira de ANÁLISE COMPLEXA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS. Esse estudo explicará, por exemplo, porque é que o raio de convergência da série de Taylor (51) é  $R = 1$ , algo que não é óbvio

olhando para a expressão da função que representa (que é uma função racional definida em todo o  $\mathbb{R}$ ).

SECÇÃO DE ÁLGEBRA E ANÁLISE, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO  
*E-mail address:* `mabreu@math.ist.utl.pt`