

GEOMETRIA DIFERENCIAL - Exame Final LMAC/MMA - 1º Semestre 2001/02

Data de entrega: 15 de Janeiro de 2002

1. Seja M uma variedade diferenciável. Mostre que o seu espaço tangente TM é uma variedade diferenciável naturalmente orientada (independentemente de M ser ou não orientável).
2. Considere o fibrado vectorial $\pi : T^*M \rightarrow M$, onde M é uma variedade diferenciável, $T^*M = \{(p, \alpha) : p \in M, \alpha \in T_p^*M\} \equiv$ o seu espaço cotangente, e $\pi(p, \alpha) = p$ a projecção natural. Defina em T^*M uma forma diferencial de grau 1, $\sigma \in \Omega^1(T^*M)$, pela fórmula

$$\sigma_{(p,\alpha)}(X) = \alpha(\pi_*(X)), \quad \forall X \in T_{(p,\alpha)}(T^*M).$$

- (a) Determine a expressão de σ em coordenadas locais de T^*M .
- (b) Mostre que a forma-2 definida por $\omega = d\sigma$ é não-degenerada, ou seja

$$\omega(X, Y) = 0, \quad \forall Y \in T(T^*M) \Rightarrow X = 0.$$

- (c) Sendo $\dim M = n$, conclua que $\omega^n \in \Omega^{2n}(T^*M)$ é uma forma de volume (i.e. sempre diferente de zero), pelo que T^*M é naturalmente orientada.
 - (d) Seja g uma métrica Riemanniana em M , e $F_g : TM \rightarrow T^*M$ o difeomorfismo naturalmente determinado por $g : F_g(p, u) = (p, g(u, \cdot))$, $p \in M$, $u \in T_pM$. Considerando a orientação de TM dada pelo exercício 1, e de T^*M dada pela alínea anterior, determine se F_g preserva ou reverte orientação.
3. Seja E um fibrado vectorial sobre uma variedade M , com conexão ∇ e curvatura $\Omega \in \Omega^2(M) \otimes \text{End}(E)$. Designando também por ∇ a conexão induzida em $\text{End}(E) \cong E \otimes E^*$ por ∇ , mostre que

$$\begin{aligned} \nabla_X(\Omega(Y, Z)) + \nabla_Y(\Omega(Z, X)) + \nabla_Z(\Omega(X, Y)) + \\ + \Omega(X, [Y, Z]) + \Omega(Y, [Z, X]) + \Omega(Z, [X, Y]) = 0 \end{aligned}$$

para todos os $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, e que esta igualdade não é mais do que a Segunda Identidade de Bianchi:

$$D\Omega \equiv 0 \quad \text{onde } D : \Omega^2(M) \otimes \text{End}(E) \rightarrow \Omega^3(M) \otimes \text{End}(E)$$

é o operador diferencial naturalmente definido por

$$D(\sigma \otimes T) = d\sigma \otimes T + \sigma \wedge \nabla.T, \quad \sigma \in \Omega^2(M), \quad T \in \Gamma(\text{End}(E)).$$

4. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana, ∇ a sua conexão de Levi-Civita e $R \in \Omega^2(M) \otimes \text{End}(TM)$ o seu tensor de curvatura.

(M, g) diz-se um espaço localmente simétrico se $\nabla R \equiv 0$.

- (a) Mostre que se (M, g) é um espaço localmente simétrico, $\gamma : [0, \ell] \rightarrow M$ é uma geodésica em M , e $X, Y, Z \in \Gamma(TM|_\gamma)$ são campos vectoriais paralelos ao longo de γ , então $R(X, Y)Z$ é também um campo vectorial paralelo ao longo de γ .
- (b) Prove que se (M, g) é um espaço localmente simétrico, conexo e com dimensão 2, então (M, g) tem curvatura constante.
- (c) Mostre que se (M, g) tem curvatura seccional constante, então M é um espaço localmente simétrico.

5. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão m . Recorde-se (cf. exercício 2 da Ficha 6) que um campo vectorial $X \in \Gamma(TM)$ é dito um campo de Killing (ou isometria infinitesimal) se $\mathcal{L}_X(g) = 0$, e que esta condição é equivalente à forma bilinear $A : TM \times TM \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $A(V, W) = g(\nabla_V X, W)$ ser anti-simétrica.

- (a) Dado um campo de Killing $X \in \Gamma(TM)$, considere a função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f = \frac{1}{2}g(X, X) = \frac{1}{2}\|X\|^2$. Mostre que

$$\Delta f = \text{Ric}_M(X, X) - \|\nabla X\|^2,$$

onde $\text{Ric}_M \equiv$ curvatura de Ricci de (M, g) e

$$\|\nabla X\|^2 = g(\nabla X, \nabla X) = \sum_{i=1}^m g(\nabla_{e_i} X, \nabla_{e_i} X),$$

com $\{e_1, \dots, e_m\} \equiv$ base ortonormada local para $\Gamma(TM)$.

- (b) Conclua que uma variedade Riemanniana compacta (M, g) com curvatura de Ricci negativa (i.e. $\text{Ric}_M(Y, Y) < 0, \forall Y \neq 0$) não tem campos de Killing diferentes de zero.

Sugestão: integre o resultado da alínea anterior sobre a variedade M .

6. Seja M uma variedade diferenciável compacta e conexa com dimensão m , e sejam $\omega_0, \omega_1 \in \Omega^m(M)$ duas formas de volume. Mostre que se $[\omega_0] = [\omega_1]$ em $H_{DR}^m(M)$, i.e. $\int_M \omega_0 = \int_M \omega_1$, então existe um difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow M$ tal que $\varphi^*(\omega_1) = \omega_0$.

Sugestão: leia o artigo de J.Moser anexo.