Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

GEOMETRIA II - Exame Final

LMAC - 2º Semestre 1999/2000

EXAME FINAL   Data de entrega: 29 de Junho

1. Plano Euclideano.

   (a) Designe-se por $r_{p,\theta}$ a rotação em torno do ponto $p \in \mathbb{R}^2$ por um ângulo $\theta \in [0, 2\pi[$ (no sentido positivo), e por t_ν a translacção por um vector $\nu \in \mathbb{R}^2$. Para $\theta \neq 0$, determine $q \in \mathbb{R}^2$ e $\phi \in [0, 2\pi[$ tais que $r_{q,\phi} = t_\nu \circ r_{p,\theta}$.

   (b) Mostre que $h \in Iso^+(\mathbb{R}^2)$ é uma translacção se e só se é da forma $h = f\, g\, f^{-1}\, g^{-1}$ com $f, g \in Iso^+(\mathbb{R}^2)$.

2. Geometria Esférica; Superfícies em $\mathbb{R}^3$.
   Considere $\mathbb{R}^2$ com coordenadas (u, v), $\mathbb{R}^3$ com coordenadas (x, y, z), e o mergulho $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dado pela inversa da projecção estereográfica:

$$(u, v) \mapsto \left(x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right) .$$

   (a) Mostre que a primeira forma fundamental deste mergulho é dada por

$$I_{(u,v)} = \frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^2} (du^2 + dv^2) .$$

   (b) Mostre que qualquer transformação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada em termos da coordenada complexa $w = u + iv$ por

$$f(w) = \frac{aw + b}{-\bar{b}w + \bar{a}} , \ a, b \in \mathbb{C}^2 , \ |a|^2 + |b|^2 = 1 ,$$

   mantém invariante a primeira forma fundamental $I_{(u,v)}$.

3. Geometria Hiperbólica; Superfícies em $\mathbb{R}^3$.

   (a) Dado $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, seja Γ_α o subgrupo de isometrias hiperbólicas de $\mathbb{H}$ gerado pela rotação limite

$$t_\alpha(z) = z + \alpha , \ \forall z \in \mathbb{H} ,$$

   e C_α o "cilindro" $\mathbb{H}/\Gamma_\alpha$ munido da métrica hiperbólica induzida pela projecção $\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/\Gamma_\alpha$. Mostre que, para quaisquer α, $\beta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, C_α e C_β são isométricos.

(b) Considere o cilindro $C = \mathbb{R}^+ \times S^1$, com coordenadas $0 < \sigma \in \mathbb{R}^+$ e $\theta \in S^1 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, e o mergulho $\Psi : C \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\Psi(\sigma, \theta) = (\sin(\theta)\,\mathrm{sech}(\sigma),\ \cos(\theta)\,\mathrm{sech}(\sigma),\ \sigma - \tanh(\sigma)) \ .$$

Esboce $\Psi(C) \subset \mathbb{R}^3$ (a chamada *pseudo-esfera* em $\mathbb{R}^3$) e mostre que a sua curvatura de Gauss é constante e igual a -1.

(c) Mostre que a pseudo-esfera $\Psi(C)$ é isométrica ao “cilindro” $C^1_{2\pi} = \mathbb{H}^1/\Gamma_{2\pi}$, onde $\mathbb{H}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\}$. Aproveite este facto para calcular o seu volume.

4. Variedades, Formas Diferenciais e Teorema de Stokes

(a) Seja M^n uma variedade diferenciável, compacta e sem bordo. Mostre que M é orientável se e só se existe uma forma diferencial ω de grau n, definida e diferente de zero em todos os pontos de M (i.e. ω é uma *forma de volume* em M).

(b) Mostre que uma forma de volume ω numa variedade diferenciável M, compacta e sem bordo, nunca é *exacta*, i.e. não existe em M uma forma diferencial σ de grau $(n-1)$ tal que $\omega = d\sigma$.

5. Geometria Intrínseca de Superfícies.
Considere a variedade $M = \{\, (x, \theta) \ : \ x \in]-1, 1[\,,\ \ \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \,\} \cong \ ]-1, 1[\times S^1$, munida com uma métrica Riemanniana, $\langle \cdot, \cdot \rangle : TM \times TM \to \mathbb{R}$, que em relação à base $\{ \frac{\partial}{\partial x}\, ,\ \frac{\partial}{\partial \theta} \}$ de cada $T_{(x,\theta)}M$ é representada pela matriz

$$g(x, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{h(x)} & 0 \\ 0 & h(x) \end{bmatrix} \ ,$$

com h uma função estritamente positiva no intervalo $]-1, 1[$.

(a) Mostre que a curvatura de Gauss de $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é dada por $K = -\frac{1}{2}h''$.

(b) Mostre que o volume de $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é independente da função h e sempre igual a 4π.

(c) Para $h_1(x) = 1 - x^2$ e $h_2(x) = (1 - |x|)^2$, identifique isometricamente $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ e $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ com superfícies em $\mathbb{R}^3$ conhecidas.