Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

GEOMETRIA II - Ficha 1

LMAC - 2º Semestre 1999/2000

PLANO E SUPERFÍCIES EUCLIDEANAS Data de entrega: 4 de Abril

1. Mostre que $Iso^+(\mathbb{R}^2)$ é isomorfo ao grupo das matrizes 2×2 da forma
$$\begin{bmatrix} w & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ |w| = 1\,.$$

2. Duas isometrias $f, g \in Iso(\mathbb{R}^2)$ dizem-se **conjugadas** quando existe $h \in Iso(\mathbb{R}^2)$ tal que $h \cdot f \cdot h^{-1} = g$.
   (i) Mostre que quaisquer duas reflexões são conjugadas.
   (ii) Mostre que duas translacções t_p e t_q são conjugadas sse $\|p\| = \|q\|$.
   (iii) Mostre que duas reflexões deslizantes $\overline{r}_L \cdot t_p$ e $\overline{r}_M \cdot t_q$ são conjugadas sse $\|p\| = \|q\|$.

3. Define-se uma **meia-volta** h_p por $h_p = r_{p,\pi}$, onde $r_{p,\theta}$ denota rotação em torno de p por um ângulo θ. Mostre que:
   (i) $f = h_a \cdot h_b\,,\ a, b \in \mathbb{R}^2 \ \Leftrightarrow \ f = t_p\,,\ p \in \mathbb{R}^2$;
   (ii) qualquer reflexão deslizante é o produto de uma meia-volta com uma reflexão;
   (iii) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^2,\ h_a \cdot h_b \cdot h_c = h_c \cdot h_b \cdot h_a = h_d$ para algum $d \in \mathbb{R}^2$.

4. Prove que:
   (i) $\overline{r}_L \cdot \overline{r}_M = \overline{r}_M \cdot \overline{r}_L \ \Leftrightarrow \ L \perp M$;
   (ii) $r_{p,\theta} \cdot r_{q,\varphi} = r_{q,\varphi} \cdot r_{p,\theta} \ \Leftrightarrow \ p = q$;
   (iii) $h_a \cdot h_b = h_b \cdot h_c \ \Leftrightarrow \ b$ é o ponto médio do segmento $\overline{ab}$;
   (iv) $h_p \cdot \overline{r}_L = \overline{r}_L \cdot h_q \ \Leftrightarrow \ L$ é a recta dos pontos equidistantes de p e q.

5. (i) Seja Γ o subgrupo de $Iso(\mathbb{R}^2)$ gerado pelas translacções t_p, t_q com $p = (1, 0)$ e $q = (0, 1)$. Mostre que $\mathbb{R}^2/\Gamma$ possui uma isometria de ordem 4 induzida por uma rotação de $\mathbb{R}^2$.
   (i) Seja Γ o subgrupo de $Iso(\mathbb{R}^2)$ gerado pelas translacções t_p, t_q com $p = e^{i\pi/3}$ e $q = e^{i2\pi/3}$. Mostre que $\mathbb{R}^2/\Gamma$ possui uma isometria de ordem 6 induzida por uma rotação de $\mathbb{R}^2$.

6. Dado um ponto $p \in \mathbb{R}^2$, seja Γ_p o subgrupo de $Iso(\mathbb{R}^2)$ gerado pela translacção t_p, e C_p o "cilindro" $\mathbb{R}^2/\Gamma_p$. Mostre que, dados $p, q \in \mathbb{R}^2$, C_p e C_q são isométricos sse $\|p\| = \|q\|$.