Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

# GEOMETRIA II - Ficha 2

## LMAC - 2º Semestre 1999/2000

GEOMETRIA ESFÉRICA    Data de entrega: 18 de Abril

1. Mostre que qualquer rotação de $S^2$, $r_{P,\theta} \in SO(3)$, pode ser escrita como o produto $r_{N,\theta_3} \cdot r_{E,\theta_2} \cdot r_{N,\theta_1}$, com $N = (0,0,1)$ e $E = (0,1,0)$.

2. Considere a projecção estereográfica $St : S^2 \to \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Mostre que $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ correspondem a pontos antipodais na esfera (i.e. em posições diametricalmente opostas) se e só se $w_1 \cdot \overline{w_2} = -1$.

3. Determine o subgrupo de $PSU(2)$ que corresponde às rotações de $S^2$ em torno do ponto $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

4. Considere um cubo $C$ com vértices na esfera $S^2$ e arestas paralelas aos eixos coordenados. Seja $Iso^+(C)$ o grupo de rotações do cubo $C$, i.e.

$$Iso^+(C) = \{g \in SO(3) : g(C) = C\} .$$

   (a) Mostre que, dada qualquer permutação das 4 diagonais do cubo, existe uma e uma só rotação $g \in Iso^+(C)$ que a realiza. Conclui-se assim que $Iso^+(C) \cong S_4 \equiv$ grupo de permutações de 4 elementos.

   (b) Determine as projecções estereográficas dos vértices de $C$, bem como elementos de $PSU(2)$ que correspondam a geradores de $Iso^+(C)$.

5. Considere em $S^2$ um triângulo esférico com ângulos e respectivos lados opostos dados por $\alpha, \beta, \gamma$ e $a, b, c$, sendo cada ângulo menor do que $\pi$. Prove que:

   (i) $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$;

   (ii) $\sin a \cdot \sin \beta = \sin b \cdot \sin \alpha$.