Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

GEOMETRIA II - Ficha 3

LMAC - 2º Semestre 1999/2000

GEOMETRIA HIPERBÓLICA Data de entrega: 02 de Maio

1. Geometria hiperbólica de circunferências e círculos.

   (a) Mostre que qualquer circunferência euclideana contida em $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$ é também uma circunferência hiperbólica (i.e. conjunto dos pontos hiperbolicamente equidistantes de outro $\equiv$ centro hiperbólico).

   (b) Determine fórmulas para o centro e raio hiperbólicos de uma circunferência, em termos dos seus homólogos euclideanos.

   (c) Determine fórmulas para a área e perímetro hiperbólicos de um círculo, em termos do seu raio hiperbólico.

   (d) Uma diferença importante entre as geometrias euclideana e hiperbólica é a ordem de grandeza da razão área/perímetro de um círculo. Qual é essa diferença?

2. Mostre que duas semi-rectas em $\mathbb{H}$ com início num ponto comum do eixo dos xx são paralelas (no sentido em que se mantêm a uma distância constante uma da outra). Qual é o análogo desta situação no disco $\mathbb{D}$?

3. (a) Mostre que qualquer rotação limite de $\mathbb{D}$, com centro no ponto $1 \in \partial\mathbb{D}$, pode ser escrita na forma
   $$w \mapsto \frac{(1-i\sigma)w + i\sigma}{-i\sigma w + (1+i\sigma)}\,, \text{ com } \sigma \in \mathbb{R}\,.$$

   (b) Usando a alínea anterior, mostre que qualquer isometria em $G_{\mathbb{D}} = Iso^+(\mathbb{D}, h_{\mathbb{D}})$ é da forma

   $$(\text{rotação em torno de } 0) \cdot (\text{rotação em torno de } 1) \cdot (\text{rotação em torno de } 0)\,.$$

4. Em $\mathbb{H}$, considere os pontos $p = i$ e $q = ie^c$, com $c > 0$, de forma a que $h_{\mathbb{H}}(p, q) = c$. Sendo pqr um triângulo geodésico em $\mathbb{H}$, determine o conjunto formado pelas possiveis posições do ponto r quando:

   $$\text{(i)}\ \ \alpha = \frac{\pi}{2}\,; \qquad \text{(b)}\ \ \beta = \frac{\pi}{2}\,; \qquad \text{(c)}\ \ \gamma = \frac{\pi}{2}\,;$$

   com α, β, γ os ângulos do triângulo em p, q, r respectivamente.