Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

GEOMETRIA II - Ficha 3

LMAC - 2º Semestre 1999/2000

GEOMETRIA HIPERBÓLICA Data de entrega: 02 de Maio

1. Geometria hiperbólica de circunferências e círculos.
   (a) Mostre que qualquer circunferência euclideana contida em $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$ é também uma circunferência hiperbólica (i.e. conjunto dos pontos hiperbolicamente equidistantes de outro $\equiv$ centro hiperbólico).
   (b) Determine fórmulas para o centro e raio hiperbólicos de uma circunferência, em termos dos seus homólogos euclideanos.
   (c) Determine fórmulas para a área e perímetro hiperbólicos de um círculo, em termos do seu raio hiperbólico.
   (d) Uma diferença importante entre as geometrias euclideana e hiperbólica é a ordem de grandeza da razão área/perímetro de um círculo. Qual é essa diferença?

2. Mostre que duas semi-rectas em $\mathbb{H}$ com início num ponto comum do eixo dos xx são paralelas (no sentido em que se mantêm a uma distância constante uma da outra). Qual é o análogo desta situação no disco $\mathbb{D}$?

3. (a) Mostre que qualquer rotação limite de $\mathbb{D}$, com centro no ponto $1 \in \partial\mathbb{D}$, pode ser escrita na forma
   $$w \mapsto \frac{(1-i\sigma)w + i\sigma}{-i\sigma w + (1+i\sigma)}\,, \text{ com } \sigma \in \mathbb{R}\,.$$
   (b) Usando a alínea anterior, mostre que qualquer isometria em $G_{\mathbb{D}} = Iso^+(\mathbb{D}, h_{\mathbb{D}})$ é da forma
   $$(\text{rotação em torno de } 0) \cdot (\text{rotação em torno de } 1) \cdot (\text{rotação em torno de } 0)\,.$$

4. Em $\mathbb{H}$, considere os pontos $p = i$ e $q = ie^c$, com $c > 0$, de forma a que $h_{\mathbb{H}}(p, q) = c$. Sendo pqr um triângulo geodésico em $\mathbb{H}$, determine o conjunto formado pelas possiveis posições do ponto r quando:
   $$\text{(i)} \quad \alpha = \frac{\pi}{2}\,; \qquad \text{(b)} \quad \beta = \frac{\pi}{2}\,; \qquad \text{(c)} \quad \gamma = \frac{\pi}{2}\,;$$
   com α, β, γ os ângulos do triângulo em p, q, r respectivamente.