Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

GEOMETRIA II - Ficha 5

LMAC - 2º Semestre 1999/2000

TEOREMA DE STOKES E CURVATURA DE GAUSS Data de entrega: 8 de Junho

1. (a) Seja $M \subset \mathbb{R}^2$ uma região limitada com fronteira regular $\partial M \equiv$ variedade compacta de dimensão 1. Considere a forma diferencial $\omega = x\,dy - y\,dx$, definida em $\mathbb{R}^2$. Mostre que
$$\text{área}\,(M) = \frac{1}{2}\int_{\partial M} i^*\omega \ ,$$
onde $i : \partial M \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ é a aplicação inclusão.

   (b) Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma região limitada com fronteira regular $\partial M \equiv$ variedade compacta de dimensão 2. Considere a forma diferencial $\omega = x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy$, definida em $\mathbb{R}^3$. Mostre que
$$\text{volume}\,(M) = \frac{1}{3}\int_{\partial M} i^*\omega \ ,$$
onde $i : \partial M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ é a aplicação inclusão.

2. Sejam $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis, e $M \subset \mathbb{R}^3$ uma região limitada com fronteira regular $\partial M \equiv$ variedade compacta de dimensão 2. Sejam ainda $\langle \cdot, \cdot \rangle \equiv$ produto interno usual em $\mathbb{R}^3$, $\nu \equiv$ elemento de volume de $M \subset \mathbb{R}^3$, $\sigma \equiv$ elemento de área de ∂M, e $N \equiv$ normal exterior unitária de ∂M. Mostre que:

   (a) (*primeira identidade de Green*)
$$\int_M \langle \mathrm{grad\,f}, \mathrm{grad\,g} \rangle\, \nu + \int_{\mathrm{M}} (\mathrm{f}\,\Delta \mathrm{g})\, \nu = \int_{\partial \mathrm{M}} \mathrm{f}\, \langle \mathrm{grad\,g}, \mathrm{N} \rangle\, \sigma \ .$$
<u>Sugestão:</u> aplique o teorema da divergência ao campo vectorial $u = f\,\mathrm{grad\,g}$.

   (b) (*segunda identidade de Green*)
$$\int_M (f\,\Delta g - g\,\Delta f)\ \nu = \int_{\partial M} (f\,\langle \mathrm{grad\,g}, \mathrm{N} \rangle - \mathrm{g}\,\langle \mathrm{grad\,f}, \mathrm{N} \rangle)\ \sigma \ .$$

3. Uma função diferenciável $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é dita <u>harmónica</u> num subconjunto $B \subset \mathbb{R}^3$ se $\Delta g = 0$ em B, onde
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv \text{ operador de Laplace ou Laplaciano .}$$
Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma região limitada com fronteira regular ∂M. Mostre que:

(a) Se g_1 e g_2 são harmónicas em M e $g_1 = g_2$ na fronteira ∂M, então $g_1 = g_2$ em M.
Sugestão: use a primeira identidade de Green.

(b) Se g é harmónica em M e

$$\frac{\partial g}{\partial N} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathrm{grad\, g, N} \rangle = 0$$

em ∂M, então $g =$ constante em M.
Sugestão: use a primeira identidade de Green.

(c) Se g é harmónica em M, então

$$\int_{\partial M} \frac{\partial g}{\partial N} \cdot \sigma = 0 \ .$$

4. Considere $\mathbb{R}^2$ com o seguinte produto interno: se $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $u, v \in T_p\mathbb{R}^2$ então

$$\langle u, v \rangle_p = \frac{u \cdot v}{(g(p))^2} \ ,$$

onde $u \cdot v$ é o produto interno usual de $\mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e positiva. Mostre que a curvatura de Gauss desta métrica é

$$K = g(g_{xx} + g_{yy}) - (g_x^2 + g_y^2) \ .$$