

## GEOMETRIA SIMPLÉCTICA - 2º Semestre 2010/11

### Trabalho Final

Data de entrega: 20 de Junho

Desenvolva **um dos seguintes temas**, de acordo com o especificado no enunciado respectivo. O trabalho não pode ter mais do que 10 páginas em Latex ou 15 páginas manuscritas. O tamanho ideal será pouco mais de metade destes limites máximos, não havendo limites mínimos.

#### 1. Grupo Hamiltoniano

Seja  $(M, \omega)$  uma variedade simpléctica,  $C_c^\infty(M)$  o conjunto das funções suaves com suporte compacto em  $M$  e  $\text{Ham}_c(M, \omega)$  o grupo dos simplectomorfismos Hamiltonianos com suporte compacto em  $M$ .

Dados  $\phi, \psi \in \text{Ham}_c(M, \omega)$ , seja  $f : [0, 1] \rightarrow \text{Ham}_c(M, \omega)$ ,  $t \mapsto f_t$ , um caminho entre eles (i.e.  $f_0 = \phi$  e  $f_1 = \psi$ ) gerado pelo Hamiltoniano não-autónomo  $h_t \in C_c^\infty(M)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Define-se o comprimento  $\mathcal{L}$  do caminho  $f_t$  por

$$\mathcal{L}(f_t) = \int_0^1 \left( \max_M h_t - \min_M h_t \right) dt,$$

e a distância  $\rho$  entre  $\phi$  e  $\psi$  por

$$\rho(\phi, \psi) = \inf \mathcal{L}(f_t)$$

onde o ínfimo é tomado no conjunto de todos os caminhos  $f_t$  em  $\text{Ham}_c(M, \omega)$  que ligam  $\phi = f_0$  a  $\psi = f_1$ .

Mostre que para quaisquer  $\phi, \psi, \varphi \in \text{Ham}_c(M, \omega)$  tem-se que:

- (i)  $\rho(\phi, \psi) = \rho(\psi, \phi)$ ;
- (ii)  $\rho(\phi, \psi) \leq \rho(\phi, \varphi) + \rho(\varphi, \psi)$ ;
- (iii)  $\rho(\phi \circ \varphi, \psi \circ \varphi) = \rho(\varphi \circ \phi, \varphi \circ \psi) = \rho(\phi, \psi)$ .

Isto significa que  $\rho$  define uma pseudo-métrica bi-invariante no grupo  $\text{Ham}_c(M, \omega)$ . O facto de  $\rho$  definir de facto uma métrica em  $\text{Ham}_c(M, \omega)$ , i.e.

$$\rho(\phi, \psi) > 0 \quad \text{para quaisquer } \phi, \psi \in \text{Ham}_c(M, \omega) \text{ com } \phi \neq \psi,$$

é não-trivial. Perceba porquê e como o demonstrar.

Sugestão: cap. 12 de [MS].

Nota: a métrica  $\rho$  em  $\text{Ham}_c(M, \omega)$  é a chamada métrica de Hofer, que a introduziu em 1990 [H]. O estudo da geometria do espaço métrico  $(\text{Ham}_c(M, \omega), \rho)$  é um assunto activo de investigação, com as mais variadas aplicações em topologia simpléctica e dinâmica hamiltoniana ( [HZ] e [P]).

## 2. Variedades Kähler

Seja  $(M, J)$  uma variedade complexa compacta e

$$\Omega^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(M), \text{ com } \overline{\Omega^{p,q}(M)} \cong \Omega^{q,p}(M),$$

a decomposição das formas diferenciais em  $M$  com valores em  $\mathbb{C}$  nas suas componentes de tipo  $(p, q)$ . Como sabe, a derivada exterior  $d : \Omega^k(M, \mathbb{C}) \rightarrow \Omega^{k+1}(M, \mathbb{C})$  decompõe-se em  $d = \partial + \bar{\partial}$ , com

$$\partial : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p+1,q}(M) \quad \text{e} \quad \bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(M),$$

e

$$d^2 = 0 \Rightarrow \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = \partial^2 = 0.$$

Os grupos de cohomologia de deRham  $H^k(M, \mathbb{C})$  são definidos por

$$H^k(M, \mathbb{C}) = \frac{\ker d : \Omega^k(M, \mathbb{C}) \rightarrow \Omega^{k+1}(M, \mathbb{C})}{\text{im } d : \Omega^{k-1}(M, \mathbb{C}) \rightarrow \Omega^k(M, \mathbb{C})},$$

e os grupos de cohomologia de Dolbeault  $H^{p,q}(M)$  por

$$H^{p,q}(M) = \frac{\ker \bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(M)}{\text{im } \bar{\partial} : \Omega^{p,q-1}(M) \rightarrow \Omega^{p,q}(M)}.$$

O Teorema de Decomposição de Hodge diz que se  $(M, J, \omega)$  é uma variedade Kähler compacta então

$$H^k(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M) \quad \text{e} \quad \overline{H^{p,q}(M)} \cong H^{q,p}(M).$$

Perceba porque é que esta decomposição não é necessariamente verdade numa variedade complexa arbitrária e como pode ser demonstrada no caso Kähler.

Sejam  $b_k(M) = \dim_{\mathbb{C}} H^k(M, \mathbb{C})$  os números de Betti de  $M$ . Deduza da decomposição anterior que os números de Betti ímpares  $b_{2k+1}(M)$  de uma variedade Kähler compacta  $M$  são sempre pares. Com base neste facto, mostre que existem variedades simplécticas e variedades complexas compactas que não são Kähler.

Sugestão: cap. 17 de [CS] e/ou cap. V de [W].

### 3. Acções Hamiltonianas

Seja  $G$  um grupo de Lie,  $\mathcal{G}$  a sua álgebra de Lie e  $\mathcal{G}^*$  o espaço vectorial dual de  $\mathcal{G}$ . Seja  $(M, \omega)$  uma variedade simpléctica e  $\phi : G \rightarrow \text{Simp}(M, \omega)$  um homomorfismo definindo uma acção simpléctica de  $G$  em  $(M, \omega)$ . A derivada de  $\phi$  define um homomorfismo de álgebras de Lie

$$\begin{aligned} d\phi : \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{X}(M, \omega) \\ \xi &\mapsto X_\xi \end{aligned}$$

dado explicitamente por

$$X_\xi = \left. \frac{d}{dt} (\phi_{\exp(t\xi)}) \right|_{t=0},$$

onde  $\exp : \mathcal{G} \rightarrow G$  é a aplicação exponencial do grupo de Lie.

A acção  $\phi$  diz-se Hamiltoniana se existir uma aplicação

$$\mu : M \rightarrow \mathcal{G}^*$$

tal que:

- 1) para cada  $\xi \in \mathcal{G}$ , a função  $h_\xi : M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h_\xi(p) = \mu(p)(\xi)$  satisfaz

$$dh_\xi = X_\xi \lrcorner \omega ;$$

- 2) a aplicação  $\mu^* : \mathcal{G} \rightarrow C^\infty(M)$ , dada por  $\mu^*(\xi) = h_\xi$ , é um homomorfismo de álgebras de Lie, i.e.

$$\mu^*([\xi, \eta]) = \{h_\xi, h_\eta\}$$

onde  $\{\cdot, \cdot\}$  denota o parentesis de Poisson em  $C^\infty(M)$  induzido por  $\omega$ .

A aplicação  $\mu$  é designada por aplicação momento da acção.

Verifique que esta definição coincide com a definição de acção Hamiltoniana que conhece para grupos abelianos.

Perceba a seguinte família de exemplos. Se  $G$  é um grupo de Lie compacto, qualquer órbita  $\mathcal{O} \subset \mathcal{G}^*$  da sua acção coadjunta em  $\mathcal{G}^*$  é naturalmente uma variedade simpléctica. A acção de  $G$  em  $\mathcal{O}$  é Hamiltoniana com aplicação momento dada pela inclusão  $\mu : \mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{G}^*$ .

Formule o teorema de redução simpléctica apropriado neste contexto não-abeliano. Use-o para mostrar que as variedades  $G(k, n)$ , i.e. Grassmanianas de subespaços complexos de dimensão  $k$  em  $\mathbb{C}^n$ , são simplécticas.

Sugestão: caps. 21 a 26 de [CS] e/ou cap. 5 de [MS].

#### 4. Variedades tóricas

Uma variedade tórica é uma variedade simpléctica  $(M, \omega)$ , compacta e conexa, com dimensão  $2n$ , equipada com uma acção efectiva e Hamiltoniana  $\phi : \mathbb{T}^n \rightarrow \text{Ham}(M, \omega)$  do torus  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$ . Seja  $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação momento para  $\phi$  e  $P = \mu(M)$  a sua imagem. Como sabe, o Teorema de Convexidade de Atiyah-Guillemin-Sternberg diz-nos que  $P \subset \mathbb{R}^n$  é um polígono convexo, mais precisamente o invólucro convexo das imagens dos pontos fixos da acção  $\phi$ .

Os polígonos convexos  $P \subset \mathbb{R}^n$  que se obtêm desta forma são designados por polígonos de Delzant e caracterizados pelas seguintes propriedades:

- (i)  $P$  é simples, i.e. de cada vértice de  $p \in P$  emanam precisamente  $n$  arestas de  $P$ ;
- (ii)  $P$  é racional, i.e. cada aresta que passa num vértice  $p \in P$  é da forma  $p + tu_i$ ,  $0 \leq t < \infty$ , com  $u_i \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ ;
- (iii)  $P$  é suave, i.e. em cada vértice  $p \in P$  os  $n$  vectores  $u_1, \dots, u_n$ , determinados por (i) e (ii), podem ser escolhidos de forma a serem os vectores de uma base inteira de  $\mathbb{Z}^n$ .

Além disso, qualquer polígono de Delzant é o polígono momento de uma variedade tórica.

Delzant provou em 1988 que se  $(M_1, \omega_1, \phi_1, \mu_1)$  e  $(M_2, \omega_2, \phi_2, \mu_2)$  são duas variedades tóricas de dimensão  $2n$  tais que  $\mu_1(M_1) = \mu_2(M_2) = P \subset \mathbb{R}^n$ , então existe um simplectomorfismo  $\mathbb{T}^n$ -equivariante  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  tal que  $\mu_1 = \mu_2 \circ \varphi$ . Apresente os pontos principais da demonstração deste resultado.

Sugestão: [C] ou [D].

## 5. Curvas pseudo-holomorfas

Considere a esfera  $S^2$  equipada com a sua forma simpléctica standard  $\sigma_0$ . Seja  $\mathcal{J}(S^2, \sigma_0)$  o espaço das estruturas complexas de  $S^2$  compatíveis com  $\sigma_0$ , e  $\text{Dif}^+(S^2)$  o grupo dos difeomorfismos de  $S^2$  que preservam orientação, i.e.  $\phi \in \text{Dif}^+(S^2)$  sse  $\phi^*(\sigma_0) = f\sigma_0$  com  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função estritamente positiva. O grupo  $\text{Dif}^+(S^2)$  actua em  $\mathcal{J}(S^2, \sigma_0)$  por conjugação

$$(\phi, j) \mapsto \phi_*(j) = d\phi \circ j \circ (d\phi)^{-1}$$

e o Teorema de Uniformização diz-nos que esta acção é transitiva. A isotropia da acção na estrutura complexa standard  $j_0 \in \mathcal{J}(S^2, \sigma)$  é  $PGL(2, \mathbb{C})$  pelo que

$$\text{Dif}^+(S^2)/PGL(2, \mathbb{C}) = \mathcal{J}(S^2, \sigma) \equiv \text{contráctil.}$$

Conclui-se assim que

$$\text{Dif}^+(S^2) \sim PGL(2, \mathbb{C}) \sim SO(3),$$

onde  $\sim$  significa homotopicamente equivalente (a equivalência homotópica entre  $PGL(2, \mathbb{C})$  e  $SO(3)$  é fácil de verificar). Este resultado é devido a Smale'59.

Mostre, usando o método de Moser, que para qualquer superfície simpléctica compacta  $(\Sigma, \sigma)$  tem-se que

$$\text{Dif}^+(\Sigma) \sim \text{Simp}(\Sigma, \sigma).$$

Assim, podemos concluir que

$$\text{Simp}(S^2, \sigma) \sim SO(3).$$

Uma linha de raciocínio semelhante à anterior, usada em conjunto com a teoria de curvas pseudo-holomorfas em dimensão 4, permite provar o seguinte resultado (Gromov'85). Considere a variedade simpléctica  $(M = S^2 \times S^2, \omega = \sigma_0 \times \sigma_0)$  e seja  $\text{Simp}^+(M, \omega)$  o grupo dos symplectomorfismos de  $(M, \omega)$  que induzem a identidade em homologia. Tem-se que

$$\text{Simp}^+(M, \omega) \sim SO(3) \times SO(3).$$

Apresente os pontos principais da demonstração deste resultado.

Sugestão: [G] e/ou [A].

## Referências

- [A] M. Abreu, *Topology of symplectomorphism groups of  $S^2 \times S^2$* , *Inventiones Mathematicae* **131** (1998), 1–23.
- [CS] A. Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, LNM 1764, Springer, 2001.
- [C] K. Cieliebak, *Symplectic Geometry*, Chapter 14.
- [D] T. Delzant, *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l’application moment*, *Bull. Soc. Math. France* **116** (1988), 315–339.
- [G] M. Gromov, *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, *Inventiones Mathematicae* **82** (1985), 307–347.
- [H] H. Hofer, *On the topological properties of symplectic maps*, *Proc. Royal Soc. Edinburgh* **115A** (1990), 25–38.
- [HZ] H. Hofer e E. Zehnder, *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*, Birkhäuser, 1994.
- [MS] D. McDuff e D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford, 1995.
- [P] L. Polterovich, *The Geometry of the Group of Symplectic Diffeomorphisms*, Birkhäuser, 2001.
- [W] R.O. Wells, *Differential Analysis on Complex Manifolds*, GTM 65, Springer, 1980.