

Cálculo Diferencial e Integral II
Teste 1 - 14 de Abril de 2012 - 9h - Versão 2
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2 - yx^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (2 val.) (a) Diga, justificadamente, se g é contínua na origem.
(1 val.) (b) Calcule $\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0)$.

2. Seja $f(x, y) = (\cos(x + y), xy^2 + x^2, e^{xy})$ e $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 tal que $h(1, 1) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ e

$$Dh(1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por $\varphi = f \circ h$,

- (2 val.) (a) calcule $D\varphi(1, 1)$;
(1 val.) (b) calcule a derivada de φ_1 no ponto $(1, 1)$ segundo o vector $v = (0, 1)$.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade de $f(x, y) = 2xy - y^3 - x^2$.

4. Considere o conjunto definido por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < z < 2 - x^2 ; 0 < y < 1 ; x > 0\}.$$

- (3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)dz)dy$ e da forma $\int(\int(\int dy)dz)dx$.
(2 val.) b) Calcule o integral da função $f(x, y, z) = y$ em S .

(3 val.) 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule o volume do conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1 ; z > \sqrt{x^2 + y^2} ; y > 0\}.$$

(3 val.) 6. Seja I um intervalo compacto em \mathbb{R}^n e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que existe $\bar{x} \in I$ tal que

$$\int_I f(x) dx = f(\bar{x})\text{vol}(I).$$