Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

TESTE 2 - VERSÃO A

2 de Junho de 2012 - das 9h00 às 10h30

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 + xy\}$$

[2 v] (a) Mostre que S é uma variedade e calcule a sua dimensão.

Resolução:

O conjunto S é o gráfico da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, definida por $f(x, y) = 1 + xy$, logo S é uma variedade de dimensão 2.

[1 v] (b) Determine o espaço normal a S no ponto $(1, 1, 2)$.

Resolução:

S também pode ser descrito como o conjunto de nível zero da função C^1 dada por $F(x, y, z) = 1 + xy - z$. Como $\nabla F(1, 1, 2) = (1, 1, -1)$, o espaço normal é

$$(T_{(1,1,2)}S)^{\perp} = \{\alpha(1, 1, -1) : \alpha \in \mathbb{R}\} .$$

[2 v] (c) Determine o ponto de S mais próximo da origem.

Resolução:

Queremos determinar o ponto de mínimo da função $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeita à restrição $F(x, y, z) = 0$ (onde F é a função definida na alínea (b)). Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, temos de resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla g(x, y, z) = \lambda \nabla F(x, y, z) \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = \lambda y \\ 2y = \lambda x \\ 2z = -\lambda \\ z = 1 + xy \end{cases} ,$$

que tem uma única solução $(x, y, z, \lambda) = (0, 0, 1, -2)$. Portanto, o ponto de S mais próximo da origem é $(0, 0, 1)$.

[3 v] 2. Mostre que a equação
$$\operatorname{sen}(x + y) + xy = 0$$
define y como função de x, ou seja $y = f(x)$, numa vizinhança do ponto $(\pi, 0)$ e calcule $f'(\pi)$.

Resolução:

Seja $F(x, y) = \operatorname{sen}(x + y) + xy$. A função F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, o conjunto solução da equação é o conjunto de nível zero de F e $F(\pi, 0) = 0$, i.e., $(\pi, 0)$ é uma solução.

As derivadas parciais de F são

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \cos(x+y) + y \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \cos(x+y) + x \ .$$

Como $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\pi, 0) = -1 + \pi \neq 0$, o Teorema da Função Implícita garante que existe uma vizinhança de $(\pi, 0)$ tal que as soluções da equação são da forma $y = f(x)$, com f uma função de classe C^1.

Para calcular a derivada $f'(\pi)$ aplicamos a regra da derivada da função composta à equação $F(x, f(x)) = 0$ e obtemos $\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y} f'(x) = 0$. Pondo $x = \pi$ fica

$$-1 + (-1+\pi) f'(\pi) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f'(\pi) = \frac{1}{\pi - 1} \ .$$

3. Considere o campo vectorial

$$F(x,y,z) = \left(\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + e^{x+y^2}, \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + 2y\, e^{x+y^2}, \sqrt{x^2+y^2-1} \right)$$

[1,5 v] (a) Mostre que F é gradiente no seu domínio de definição. Justifique a resposta.

Resolução:

O domínio de F é $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 > 1\}$. Claramente a função

$$\varphi(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2-1} + e^{x+y^2}$$

é de classe C^1 no conjunto D e $\nabla\varphi = F$, ou seja, φ é um potencial para F sendo, portanto, F um campo gradiente.

[1,5 v] (b) Calcule o trabalho realizado pelo campo F ao longo do caminho $g(t) = (1+t^2, 1+t^6, t^{2012})$, $t \in [0,1]$. Justifique detalhadamente a resposta.

Resolução:

Como F é um campo gradiente com potencial φ, pelo Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de linha, temos que

$$\int_C F \cdot dg = \varphi(g(1)) - \varphi(g(0)) = \varphi(2,2,1) - \varphi(1,1,0) = \sqrt{7} + e^6 - e^2 \ .$$

4. Considere a superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 = y^2 + z^2 \ ; \ 1 < x < 2\right\}$$

orientada com a normal unitária $n = (n_x, n_y, n_z)$ tal que $n_x > 0$. Seja $G(x,y,z) = (2x, -y, -z)$.

Calcule o fluxo $\int_S G \cdot n$:

[3 v] (a) pela definição;

Resolução:

A superfície S é uma secção de um cone tendo por eixo de simetria o eixo dos xx. Recorrendo às coordenadas cilíndricas (ρ,θ,x) em torno do eixo dos xx, onde $\rho=\sqrt{y^2+z^2}$, obtemos a parametrização

$$g(\rho,\theta)=(\rho,\rho\cos(\theta),\rho\,\mathrm{sen}\,\theta) \quad \text{com} \quad \theta\in]0,2\pi[,\rho\in]1,2[\ .$$

Como

$$\frac{\partial g}{\partial\rho}=(1,\cos\theta,\mathrm{sen}\,\theta) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial g}{\partial\theta}=(0,-\rho\,\mathrm{sen}\,\theta,\rho\cos\theta)$$

o vector normal

$$\frac{\partial g}{\partial\rho}\times\frac{\partial g}{\partial\theta}=(\rho,-\rho\cos\theta,-\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

tem o mesmo sentido de n. Logo, pela definição de fluxo

$$\begin{aligned}\iint_S G\cdot n &= +\int_1^2\left(\int_0^{2\pi} G(g(\rho,\theta))\cdot(\frac{\partial g}{\partial\theta}\times\frac{\partial g}{\partial\theta})d\theta\right)d\rho\\ &=\int_1^2\left(\int_0^{2\pi}3p^2d\theta\right)d\rho=14\pi\ .\end{aligned}$$

[3 v] (b) usando o Teorema da Divergência.

Resolução:

Seja $T_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x=1,y^2+z^2\leq 1\}$ com normal unitária $n_{T_1}=(-1,0,0)$, $T_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x=2,y^2+z^2\leq 4\}$ com normal unitária $n_{T_2}=(1,0,0)$ e seja D o sólido limitado por S e pelos discos T_1 e T_2. Portanto $\partial D=S\cup T_1\cup T_2$, as normais n_{T_1} e n_{T_2} são exteriores e a normal n é interior. Pelo Teorema da Divergência,

$$\iiint_D \mathrm{div}(G)=-\iint_S G\cdot n+\iint_{T_1}G\cdot n_{T_1}+\iint_{T_2}G\cdot n_{T_2}\ .$$

Dado que $\mathrm{div}(G)=0$, fica

$$\begin{aligned}\iint_S G\cdot n&=\iint_{T_1}G\cdot n_{T_1}+\iint_{T_2}G\cdot n_{T_2}\\ &=\iint_{T_1}(-2x)+\iint_{T_2}(2x)=-\iint_{T_1}2+\iint_{T_2}4=-2\pi+16\pi\ =14\pi.\end{aligned}$$

[3 v] 5. Seja $D\subset\mathbb{R}^3$ um domínio regular. Sejam ϕ e ψ campos escalares definidos num aberto A (com $\bar{D}\subset A$), tais que $\phi,\psi\in C^2(A)$. Mostre que:

$$\int_D(\phi\,\Delta\psi+\nabla\phi\cdot\nabla\psi)=\int_{\partial D}\phi\,\nabla\psi\cdot n$$

onde n é a normal unitária exterior a ∂D e onde $\Delta\psi=\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$.

Resolução:

Seja $F = \phi \nabla \psi$. Como ψ é de classe C^2 em A, $\nabla \psi$ e, portanto, F são de classe C^1 em A. Como

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\phi \frac{\partial \psi}{\partial x}) = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x} \ ,$$

por simetria obtém-se

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(F) &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \\
&= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z} + \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial z}\right) \\
&= \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z} + \phi(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z}) \\
&= \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \Delta \psi \ .
\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema da Divergência ao domínio regular D e ao campo vectorial F, obtém-se a igualdade pedida, uma vez que n é a normal unitária exterior.