Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 6

(Teorema de Fubini)

1. Calcule o integral da função indicada no rectângulo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1\ ;\ \ 0 \leq y \leq 2\}$.
   (a) $f(x,y) = x^2 y$.
   (b) $f(x,y) = y \operatorname{sen}(xy)$.

2. Invertendo a ordem de integração, calcule
   (a) $\int_0^1 \left(\int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx \right) dy$.
   (b) $\int_0^1 \left(\int_0^{\operatorname{arcsen} y} y \operatorname{sen} x\, dx \right) dy$.

3. Inverta a ordem de integração dos seguintes integrais duplos
   (a) $\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y) dy \right) dx$.
   (b) $\int_1^2 \left(\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y) dy \right) dx$.
   (c) $\int_0^{2\pi} \left(\int_{-1}^{\operatorname{sen} y} f(x,y) dx \right) dy$.

4. Calcule a área da seguinte região
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 2 - x^2\}$$
usando um integral iterado da forma $\int (\int dx) dy$. Calcule ainda (usando a ordem de integração que entender) as coordenadas do centro de massa, e os momentos de inércia em torno dos eixos Ox, Oy e da origem de uma placa com a forma descrita por D admitindo que a densidade de massa é constante igual a 1.

5. Escreva expressões para o volume de V na ordem indicada.
   (a) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \geq 0\ ;\ y \geq 0\ ;\ x + y \leq 1\ ;\ 0 \leq z \leq x + y\}$ nas ordens $\int \left(\int \left(\int dy \right) dz \right) dx$ e $\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz$.
   (b) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\ ;\ x^2 + z^2 \leq 1\}$ nas ordens $\int \left(\int \left(\int dy \right) dx \right) dz$ e $\int \left(\int \left(\int dz \right) dy \right) dx$.
   (c) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} \leq y \leq x\ ;\ 0 \leq z \leq x\ ;\ x \leq 1\}$ nas ordens $\int \left(\int \left(\int dz \right) dy \right) dx$, $\int \left(\int \left(\int dz \right) dx \right) dy$ e $\int \left(\int \left(\int dx \right) dy \right) dz$.

6. Escreva uma expressão para o volume do conjunto
$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1\ ;\ 0 \leq z \leq x^2 - y^2\ ;\ x > 0\},$$
usando um único integral triplo.

7. Considere a região
$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z \leq 1\ ;\ x + y - 2z \leq 1\ ;\ x \geq 0\ ;\ y \geq 0\}.$$
Calcule o volume de V na forma:
a) $\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \cdots dx \right) dy \right) dz$.
b) $\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \cdots dz \right) dy \right) dx$.

8. Calcule $\int_V f$ sendo
   (a) $f(x, y, z) = z$ e V o sólido limitado pelos planos coordenados e o plano $x + y + z = 1$.
   (b) $f(x, y, z) = xyz$ e V o sólido limitado pelos planos $x = 1$, $x = 0$, $y = 1$,$y = 0$,$z = 0$ e o parabolóide $z = x^2 + y^2$.
9. Calcule o volume e a segunda coordenada do centróide do sólido limitado pela superfície $z = x^2 - y^2$, o plano xy e os planos $x = 0$ e $x = 1$.