Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 7

(Mudança de Variáveis de Integração. Regra de Leibniz)

1. Escreva o integral $\int\int_S f(x,y)dxdy$ em coordenadas polares considerando as seguintes regiões S.
   (a) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \leq 2, y < |x|\}$.
   (b) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0\}$.
   (c) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$.
2. Utilizando coordenadas polares (possivelmente modificadas), calcule
   (a) $\int_{-2}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} e^{-x^2-y^2}dy\right)dx$.
   (b) $\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}dy\right)dx$.
   (c) $\int_{0}^{2}\left(\int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} (x^2+y^2)dy\right)dx$.
   (d) $\int\int_S \cos((x-1)^2+(y-1)^2)dxdy$ com $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x-1)^2+(y-1)^2 \leq 2\}$.
   (e) A área da região $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} < 1 \ ; \ y > |x|\}$.
3. Considere a transformação de coordenadas definida por
   $$x = u+v, \qquad y = v-u^2.$$
   (a) Sendo T o triângulo com vértices $(0,0),(2,0)$ e $(0,2)$ no plano uv, determine a imagem de T no plano xy pela transformação de coordenadas.
   (b) Sendo S o conjunto determinado na alínea anterior, calcule $\int\int_S \frac{1}{(x-y+1)^2}dxdy$.
4. Considere o conjunto
   $$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y < 1 \ ; \ 0 < y < x\},$$
   e seja $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = e^{-(x+y)^4}(x^2-y^2)$. Calcule $\int_D f$ utilizando uma transformação de coordenadas apropriada. Justifique cuidadosamente.
5. Escreva expressões em coordenadas cilíndricas e esféricas para o volume das seguintes regiões
   (a) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x^2+y^2} < z < \sqrt{1-x^2-y^2}\}$.
   (b) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < y < x, z > 0, 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 2\}$.
6. Considere a região
   $$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4 \ ; \ z^2 \leq x^2+y^2 \ ; \ x \geq 0, y \geq 0\},$$
   com densidade de massa dada por $\alpha(x,y,z) = x^2+y^2$.
   a) Escreva expressões para a massa de U utilizando coordenadas esféricas e coordenadas cilíndricas.
   b) Calcule o momento de inércia de U relativamente ao eixo Oz.
7. Considere o sólido
   $$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+z^2 \leq 4 \ ; \ 0 \leq y \leq (x^2+z^2)^{\frac{1}{4}} \ ; \ x \geq 0, z \geq 0\},$$
   com densidade de massa dada por $\alpha(x,y,z) = xyz$. Calcule a massa total de S.

8. Calcule o volume de cada uma das regiões

   a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 1 - (\sqrt{x^2 + z^2} - 1)^2 \; ; \; x \geq 0 \; ; \; z \geq 0\}$

   b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 < 1 \; ; \; y \geq 0\}$.

9. (a) Calcule $F'(0)$ onde F é a função definida pela expressão $F(t) = \int_1^3 e^{-tx^2} dx$.

   (b) Escreva uma expressão integral para as derivadas parciais da função definida por

$$F(x, y) = \int_0^1 \left(\int_0^u \arctan(xu + y^2 v) \, dv \right) du.$$

   (c) Escreva uma expressão para a derivada da função $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(x) = \int_{x^2}^{\cos x} \log\left(1 + e^{tx}\right) \, dt.$$

10. Sendo $V_t = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq t\}$ e $F\colon [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ a função definida por

$$F(t) = \int\int\int_{V_t} \frac{e^{t(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dxdydz,$$

calcule $F'(t)$.