Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 8

(Função Inversa. Função Implícita)

1. Para cada um dos casos seguintes determine o conjunto dos pontos do domínio de f em que o respectivo Jacobiano é não nulo. Determine se f é injectiva no respectivo domínio. Descreva o conjunto $f(S)$. Se f for injectiva em S, determine f^{-1} explicitamente.

   a) $f(x,y) = (x+2y, x-y)\,, \quad S = \mathbb{R}^2$.

   b) $f(x,y) = \left(\log xy, \dfrac{1}{(x^2+y^2)}\right)\,, \quad S = \{(x,y) : 0 < y < x\}$.

   [Resolva este exercício no final da ficha.]

2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (2xy, x^2 - y^2)$.

   a) Mostre que f não é injectiva.

   b) Determine, justificadamente, o conjunto de pontos em que f tem inversa local.

   c) Determine a matriz Jacobiana, no ponto $(2,0)$, de uma das funções inversas locais f^{-1} da função f.

3. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} u &= & xy + \operatorname{sen}(x+y) \\ v &= & e^{-x+y-2} + \frac{x}{y}. \end{cases}$$

   Mostre que existe uma vizinhança de $(u,v) = (-1,0)$ e uma vizinhança de $(x,y) = (-1,1)$ em que o sistema define (x,y) como função, de classe C^1, de (u,v) e calcule $\dfrac{\partial x}{\partial u}(-1,0)$.

4. Mostre que a equação $x\cos(xy) = 0$ define, implicitamente, y como função de x em alguma vizinhança do ponto $(1, \frac{\pi}{2})$ e calcule a derivada $\frac{df}{dx}(1)$. Confirme o resultado explicitando y como função de x.

5. Considere a equação $x^2 + xy + y^2 = 27$.

   a) Mostre que esta equação define y como função de x numa vizinhança do ponto $(3,-6)$, ou seja $y = f(x)$.

   b) Calcule as derivadas $f'(3)$ e $f''(3)$.

6. Mostre que a equação $zx^2 + z^3y^2 - xy^2 = 1$ define implicitamente z como função de x e de y, em torno do ponto $(0,1,1)$. Calcule a derivada $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,1)$.

7. O tempo t e as coordenadas (x,y) de um ponto em movimento no plano satisfazem o seguinte sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= & e^{2t} + 1 \\ x\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x) &= & t. \end{cases}$$

   a) Mostre que este sistema define, numa vizinhança do ponto $(t_0, x_0, y_0) = (1,1,e)$, uma função de classe C^1, dada por

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)).$$

   b) Calcule $\alpha'(1)$.

8. Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x - y)$$

e o conjunto

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = (2, 0)\}.$$

Use o teorema da função implícita para justificar que, numa vizinhança do ponto $(1, 1, 0)$, o conjunto C é o gráfico de uma função $f : I \to \mathbb{R}^2$, em que I é um intervalo aberto em $\mathbb{R}$, ou seja, duas das variáveis são funções da terceira.

9. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e suponhamos que a equação $F(x, y, z) = 0$ determina cada uma das variáveis como função, de classe C^1, das restantes, ou seja,

$$x = x(y, z)\ ;\ y = y(x, z)\ ;\ z = z(x, y).$$

Mostre que se tem

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = -1$$