Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 14 de Abril de 2012 - 9h - Versão 1

Duração: 90 minutos

Resolução abreviada

1. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2 val.) (a) Diga, justificadamente, se f é contínua na origem.

Resolução: A função f é contínua na origem sse

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

Podemos começar por analisar os limites direccionais:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - m^3x^3}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x - m^3x}{1 + m^2} = 0.$$

Se existir limite de f na origem terá de ser 0. Como

$$\left|\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right| \leq \frac{x^2|x| + y^2|y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}(|x| + |y|) = |x| + |y| \to 0,$$

concluimos que o limite de f na origem é 0 e portanto a função é contínua na origem.

(1 val.) (b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Resolução:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h - 0}{h} = 1.$$

2. Seja $g(x,y) = (\operatorname{sen} y + x^2, e^{x+y})$ e $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que

$$Dh(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é dada por $\sigma = h \circ g$,

(2 val.) (a) calcule $D\sigma(0,0)$;

Resolução: Uma vez que g e h são funções diferenciáveis, pelo teorema da derivação da função composta podemos concluir que $h \circ g$ é diferenciável e

$$D\sigma(0,0) = D(h \circ g)(0,0) = Dh(g(0,0))Dg(0,0) = Dh(0,1)Dg(0,0).$$

Temos

$$\begin{aligned}
D\sigma(0,0) &= Dh(0,1)Dg(0,0) = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x & \cos y \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{bmatrix}_{|(0,0)} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(1 val.) (b) calcule a derivada de σ_2 no ponto $(0,0)$ segundo o vector $v = (1,1)$.

Resolução: Como σ_2 é diferenciável no ponto $(0,0)$, a derivada segundo o vector v é dada por

$$D_v\sigma_2(0,0) = D\sigma_2(0,0) \cdot v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1.$$

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade de $f(x,y) = x^3 + y^2 - xy$.

Resolução: A equação vectorial,

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - y, 2y - x) = (0,0),$$

tem como soluções os pontos $(x,y) = (0,0)$ e $(x,y) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$, pelo que estes são os únicos pontos críticos.

A matriz hessiana de f é:

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

logo

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

O determinante desta matriz é igual a -1, logo a matriz tem um valor próprio positivo e outro negativo e, portanto, $(0,0)$ é um ponto em sela. Para o ponto $(x,y) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ a matriz Hessiana é dada por

$$H_f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Temos $\det H_f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = 1$, logo os valores próprios da matriz têm o mesmo sinal. Como o traço da matriz é igual 3, podemos concluir que os valores próprios são positivos e portanto o ponto $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ é um ponto de mínimo relativo.

4. Considere o conjunto definido por

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y+z<2 \; ; \; z>y^2 \; ; \; 0<x<1 \; ; \; y>0\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma: $\int(\int(\int dz)dx)dy$, e da forma $\int(\int(\int dy)dz)dx$.

Resolução:

$$\begin{aligned} \text{vol}(V) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_{y^2}^{2-y} dz \right) dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_1^2 \left(\int_0^{2-z} dy \right) dz \right) dx + \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{z}} dy \right) dz \right) dx. \end{aligned}$$

(2 val.) b) Calcule o integral da função $f(x,y,z) = x$ em V.

Resolução:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_{y^2}^{2-y} x\, dz \right) dx \right) dy = \frac{7}{12}.$$

(3 val.) 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule o volume do conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2<2 \; ; \; z>x^2+y^2 \; ; \; y>|x|\}.$$

Resolução: Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) tem-se:

$$\text{vol}(A) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_0^1 \left(\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} \rho\, dz \right) d\rho \right) d\theta = \frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}-1) - \frac{\pi}{8}.$$

(3 val.) 6. Seja I um intervalo compacto em $\mathbb{R}^n$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que existe $\bar{x} \in I$ tal que

$$\int_I f(x)\, dx = f(\bar{x}) vol(I).$$

Resolução:

Dado que I é compacto e f é contínua, sejam A e B dois pontos do intervalo I tais que

$$m = \min_I f = f(A) \; ; \quad M = \max_I f = f(B).$$

Pelas propriedades do integral tem-se $m\, \text{vol}(I) \leq \int_I f \leq M\, \text{vol}(I)$, ou seja,

$$m \leq \frac{\int_I f}{\text{vol}(I)} \leq M.$$

Considere-se a função contínua $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = f(A + t(B-A))$. Notando que $g(0) = f(A) = m$ e $g(1) = f(B) = M$, conclui-se que existe $\theta \in [0,1]$ tal que $g(\theta) = \dfrac{\int_I f}{\text{vol}(I)}$.

Fazendo $\overline{x} = A + \theta(B-A)$, tem-se

$$f(\overline{x}) = \frac{\int_I f}{\text{vol}(I)} \Leftrightarrow \int_I f(x) dx = f(\overline{x}) \text{vol}(I).$$