Exercícios complementares propostos

1. Qual dos seguintes conjuntos é uma variedade-2 em $\mathbb{R}^3$ (justifique)?

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

$$N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = \sqrt{x^2 + y^2}, \ z > 1\}.$$

2. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ e

$$C_{\alpha,n} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^n - y^n = \alpha\right\}$$

   (a) Prove que $C_{\alpha,n}$ é uma variedade para qualquer $\alpha \neq 0$. Qual a sua dimensão?

   (b) Indique o espaço tangente a $C_{4,2}$ no ponto $(2, 0)$.

   (c) Diga, justificando, se $C_{0,n}$ é variedade diferencial para n ímpar. O que pode afirmar para n par?

3. Seja

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 1 + x \ ; \ x^2 + y^2 = 1\}.$$

   (a) Mostre que M é uma variedade e determine a sua dimensão

   (b) Determine a recta tangente a M no ponto $(1, 0, 2)$.

   (c) Justifique que numa vizinhança de $(1, 0, 2)$ a variedade M pode ser descrita como o gráfico de uma função de classe C^1 da forma $f(y) = (x(y), z(y))$. Calcule $f'(0)$.