EXERCÍCIOS PROPOSTOS DE EDPS - FICHA 3

(1) Recorrendo às identidades de Green, prove a unicidade do problema de Dirichlet para a equação de Laplace. Que pode dizer sobre o problema de Neumann?

(2) Seja u uma solução da equação de Laplace em $\mathbb{R}^N$ e O uma matriz ortogonal $N \times N$. Prove que

$$v(x) = u(Ox), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

é também uma solução desta equação.

(3) (Teorema do valor médio para a equação de Laplace) Prove que se $u \in C^2(\Omega)$ é harmónica então

$$\fint_{\partial B(x,r)} u \, dS = \fint_{B(x,r)} u \, dy = u(x)$$

para toda a bola aberta $B(x,r) \subset \Omega$.

(4) Seja $N \geqslant 3$ e u uma solução do problema de Poisson

$$\begin{cases} -\triangle u = f, & \text{em } B(0,r) \\ u = g & \text{em } \partial B(0,r). \end{cases}$$

Prove que

$$u(0) = \fint_{\partial B(0,r)} g \, dS + \frac{1}{N(N-2)\alpha(N)} \int_{B(0,r)} \left(\frac{1}{|x|^{N-2}} - \frac{1}{|r|^{N-2}} \right) f \, dx.$$

(5) (Recíproco do Teorema do valor médio para a equação de Laplace) Seja $u \in C^2(\Omega)$ tal que

$$\fint_{\partial B(x,r)} u \, dS = u(x)$$

para toda a bola aberta $B(x,r) \subset \Omega$. Prove que u é harmónica em Ω.

(6) Seja $u \in C^2(\Omega)$ tal que

$$\fint_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = 0$$

para toda a bola aberta $B \subset \Omega$. Prove que u é harmónica em Ω.

(7) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado. Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

- Usando resultados de CDI-II, prove que se $\triangle u > 0$ então u não tem máximo local.
- Prove agora que se $\triangle u = 0$ então

  $$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial \Omega} u$$

  (Princípio do máximo para a equação de Laplace).[1,2]
- Generalizar este princípio a equações da forma

  $$Lu = 0$$

  onde $Lu = \triangle u + \sum_{i=1}^{N} b_i u_{x_i}$.[3]

---

[1] Veremos na aula outra prova com base no Teorema do valor médio.

[2] Sugestão: aplique a alínea anterior a $u(\cdot) + \varepsilon |\cdot|^2$

[3] Sugestão: considere agora $u + \varepsilon e^g$ com $g(x) = \lambda x_i$ para um λ apropriado.

- Seja agora $Lu = \triangle u + \sum_{i=1}^{N} b_i u_{x_i} + cu$, $c < 0$. Prove que se $Lu \geqslant 0$ e $u \geqslant 0$, então u alcança o máximo na fronteira de Ω. Deduzir um princípio de unicidade para o problema de Dirichlet associado ao operador L.