**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

# Equações em derivadas parciais

## 5ª Ficha de exercícios propostos

1. Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções harmónicas num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ uniformemente convergente para uma função $u$ em subconjuntos compactos de $\Omega$ . Mostre que $u$ é harmónica.

2. Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão monótona de funções harmónicas definidas num aberto $\Omega \subset R^N$ convergente num ponto $x \in \Omega$. Mostre que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformente para uma função harmónica em cada aberto conexo $U$ tal que $U \subset\subset \Omega$.

3. Considere a equação $\triangle u = u^k$, $k \in \mathbb{N}$, num domínio $\Omega \subset \Omega$. Prove que

   - Se $k$ é par e $u$ não é identicamente nula, então $u$ não pode alcançar o supremo num ponto interior.
   - Se $k$ é ímpar e $u$ não é identicamente nula, então $u$ não pode alcançar um supremo positivo num ponto interior.[1]

4. Seja $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus B(1,0)$. Dê dois exemplos de funções harmónicas em $\Omega$ que valham identicamente um sobre $\partial\Omega$.[2] Veja que se $u \in C(\overline{\Omega})$ é harmónica em $\Omega$ e $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$ então
$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

5. (Simetria da função de Green) Prove que a função de Green, $G$, para $B(0,R) \subset \mathbb{R}^N$ é simétrica, i.e, que $G(x,y) = G(y,x)$ para todos os $x, y \in \Omega$, $x \neq y$. Veja que em geral a função de Green, $G$, para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (aberto limitado com fronteira de classe) é simétrica.

6. Seja $G$ a função de Green para um aberto limitado com fronteira de classe $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Prove que $G(x,y) < 0$ para todos os $x, y \in \Omega$, $x \neq y$. Prove ainda que $\frac{\partial G}{\partial n}(x,y) \geq 0$ ara todo o $x \in \partial\Omega$ e $y \in \Omega$.

7. Seja $\Omega$ um aberto de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $x_0 \in \Omega$, e uma função $u$ harmónica em $\Omega \setminus \{x_0\}$ tal que
$$\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)}{\phi(x - x_0)} = 0,$$
onde $\phi$ é a solução fundamental para a equação de Laplace. Mostre que $u$ pode ser extendida por continuidade a $\Omega$ e que a extensão é harmónica.

8. Seja $u$ harmónica em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Mostre que a função $v(x) = |x|^{2-N} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$ definida em $U = \{x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} : \ x/|x|^2 \in \Omega\}$ é harmónica em $U$.[3]

9. Escreva o núcleo de Poisson numa bola $B(0,R) \subset \mathbb{R}^2$ em coordenadas polares. Use esta expressão para determinar a função harmónica no disco unidade de $\mathbb{R}^2$ com valores 1 na semicircunferência superior do disco e $-1$ na inferior.

---

[1] De aqui se deduz a unicidade para o problema exterior de Dirichlet em $\Omega$ nesta calsse de funções.

[2] Isto prova que o problema de Dirichlet exterior não tem solução única.

[3] Esta função é conhecida pela transformada de Kelvin de $u$ e permite transformar um problema de Dirichlet exterior num interior.