EXERCÍCIOS PROPOSTOS DE EDPS - FICHA 6

(1) Suponhamos que $N = 1$ e seja $u(x,t) = v\left(\frac{x^2}{t}\right)$.
- Mostre que $u_t = u_{xx}$ se e só se
$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0 \quad (z > 0).$$
- Mostre que a solução geral da equação anterior é
$$v(z) = C\int_0^z e^{-s/4}s^{-1/2}\,ds + d.$$
- Derive $v\left(\frac{x^2}{t}\right)$ em relação a x e escolha a constante C de modo a obter a solução fundamental da equação do calor para dimensão um.

(2) Prove o Teorema de Plancherel.

(3) Veja que $u_k(x,t) = \mathrm{sen}(kx)e^{-k^2t},\ k \in \mathbb{N}$, são as soluções particulares (não triviais) do problema
$$\begin{gathered} u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in (0,\pi),\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geqslant 0 \end{gathered}$$
obtidas por separação de variáveis.

(4) Use o método de separação de variáveis para obter a solução do problema mixto
$$\begin{gathered} u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in (0,\pi),\ t > 0 \\ u(x,0) = \mathrm{sen}(x) + 3\mathrm{sen}(2x), \quad x \in [0,\pi], \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geqslant 0. \end{gathered}$$

(5) Use o método de separação de variáveis para obter a solução do problema mixto
$$\begin{gathered} u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (x,y) \in (0,\pi)\times(0,\pi), \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in [0,\pi], \\ u(0,y) = u(x,\pi) = u(\pi,y) = 0, \quad x,y \in [0,\pi] \end{gathered}$$
(suponha f suficientemente regular; que condições de compatibilidade deve verificar?).