EXERCÍCIOS PROPOSTOS DE EDPS - FICHA 7

(1) Seja u uma solução regular da equação do calor em $\mathbb{R}^N \times (0, \infty)$.

i) Mostre que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ a função $u_\lambda(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ é também solução.

ii) Use i) para provar que

$$v(x,t) + xDu(x,t) + 2tu_t(x,t)$$

é também uma solução da mesma equação.

(2) Escreva uma fórmula explícita para a solução de

$$u_t - \triangle u + cu = f, \quad \mathbb{R}^N \times (0,\infty)$$
$$u = g, \quad \mathbb{R}^N \times \{t = 0\}.$$

Faça o mesmo para o problema

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad x, t > 0$$
$$u(x,0) = f(x) \quad x > 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad t > 0$$

(suponha f, g suficientemente regulares).

(3) Sejam $g \in C^2(\mathbb{R})$ e $h \in C^1(\mathbb{R})$. Seja u a solução do problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

i) Supondo que g e h têm suporte no intervalo $[-1,1]$, diga, justificadamente, até que instante t é que podemos garantir que u é nula se $x = 3$. E se $x = -5$?

ii) Supondo agora que g e h têm suporte no conjunto dos pontos tais que $|x| > 1$, diga, justificadamente, até que instante t é que podemos garantir que u é nula se $x = 0$?

iii) Prove que se g e h têm suporte no intervalo $[-l, l]$, então para cada valor de x_0 existe um instante t_0 a partir do qual $u(x_0, t)$ é constante para todo o $t > t_0$.

(4) Seja

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cos\pi x, \quad |x| \leqslant 1/2, \\ 0, \quad |x| > 1/2. \end{cases}$$

Escreva a solução do problema anterior sendo $g(x) = \varphi(x)$ e $h(x) = 0$. Determine a região do semiplano $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ na qual u é não nula. Desenhe os gráficos de $u(\cdot, 0)$, $u(\cdot, 1/2)$, $u(\cdot, 2)$ e $u(2, \cdot)$.

(5) Resolva o problema não homogéneo

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = g(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

sendo $g(x,t) = t$ e $g(x,t) = (\operatorname{sen} x)e^t$.

(6) Aplique o método de separação das variáveis para determinar a solução do seguinte problema mixto

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in (0,\pi), t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(0,\pi) = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = \cos(x) + \cos(3x), \;\; u_t(x,0) = 5 + \cos(x) + 3\cos(3x), \quad x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Idem para os seguintes problemas (com condições iniciais nulas nos extremos do intervalo $[0,\pi]$)

1) $u_{tt} - u_{xx} + u^2 = 0$ Equação de Klein-Gordon

2) $u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 0$ Equação do telegrafísta

(7) Exercícios 16,17,18 (pág 88) do livro do Evans