EXERCÍCIOS PROPOSTOS DE EDPS - FICHA 8

(1) a) Comprove que a função $\log|.|$ pertence a $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.
b) Comprove que para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ existe o limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx,$$

e que a função

$$\varphi \to \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

é uma distribuição.[1]
c) Comprove que $(\log|.|)^{'} = VP(1/x)$.

(2) Estude a validez da fórmula de derivação dum produto da forma fT se $f \in C^\infty(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}^{'}(\Omega)$.

(3) Sejam $y \in \mathbb{R}^N$ e $T \in \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^N)$. Defini-se a traslada de T, $\tau_y T$, por $< \tau_y T, \varphi >=< T, \varphi(\cdot + y) >$.
a) Comprove que $\tau_y T \in D^{'}(\mathbb{R}^N)$.
b) Comprove que se $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, então $\tau_y T_f = T_{f_y}$, onde $f_y(x) = f(x-y)$, $x \in \mathbb{R}^N$.
c) Comprove que se $T \in D^{'}(\mathbb{R}^N)$, $h \in \mathbb{R}$ e $e_j = (0, ..., 1, ..., 0)$ então[2]

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tau_{he_j} T - T}{-h} = \frac{\partial T}{\partial x_j}.$$

(4) Seja $N \geqslant 3$, prove que $\triangle \phi = \delta_0$, sendo ϕ a solução fundamental para a equação de Laplace.

(5) Seja $f = \chi_{[0,\infty) \times [0,\infty)}$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$.

(6) Prove que no sentido das distribuições

$$\lim_{n \to \infty} \{n e^{-n|x|}\} = 2\delta_0.$$

[1]Designa-se por valor principal de $1/x$: $V(1/x)$.

[2]Ou seja, as derivadas de T podem-se ver como quocientes incrementais.