

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS DE EDPS - FICHA 9

- (1) Sejam  $u, v \in W^{m,p}(\Omega)$ ,  $|\alpha| \leq m$ .
  - Prove que  $D^\alpha u \in W^{m-|\alpha|,p}(\Omega)$  e que  $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$  para todos os multi-índices  $\beta$  tais que  $|\alpha| + |\beta| \leq m$ .
  - Prove que qualquer combinação linear de  $u$  e  $v$  está em  $W^{1,p}(\Omega)$ , e obtenha uma fórmula para a derivada desta combinação linear.
  - Seja  $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Prove que  $\xi u \in W^{m,p}(\Omega)$  e deduza uma fórmula para a derivada de  $\xi u$ .
- (2) Prove o teorema que dá a existência de partições da unidade (enunciado nas aulas).
- (3) Seja  $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N > 1$ . Determine para que valores de  $\alpha$  a função  $f(x) := |x|^\alpha \in H^1(\Omega)$ .
- (4) Estude se  $\chi_{(0,1)}$  pertence a  $W^{1,p}(\mathbb{R})$ .
- (5) Seja  $u \in L^p(\Omega)$ . Prove que  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $p \geq 1$ , se e somente se  $u$  admite uma representação  $\tilde{u}$  absolutamente contínua em quase todos os segmentos em  $\Omega$  paralelos aos eixos coordenados e cujas derivadas parciais (no sentido clássico) pertencem a  $L^p(\Omega)$ .<sup>1</sup>
- (6) Faltam...

---

<sup>1</sup>(Ver Ziemer)