Matemática Computacional
Ficha 1: Teoria dos erros (Capítulo 1)
1s-2017/18, MEEC

I. Notação e revisão da matéria

- $e_x = x - \tilde{x}$ *(erro de $\tilde{x}$ em relação a x)*
- $|e_x|$: *erro absoluto* de $\tilde{x}$
- $|\delta_x|$: *erro relativo de $\tilde{x}$ em relação a x*, onde, para $x \neq 0$,

$$\delta_x = \frac{x - \tilde{x}}{x}$$

- $100\ |\delta_x|\%$: *percentagem de erro*
- Notação que iremos adoptar: $e_{\tilde{x}}$ e $\delta_{\tilde{x}}$ (no lugar de e_x e δ_x)
- $\tilde{x} = \sigma(0.a_1a_2...a_n)_\beta\beta^t$, $a_1 \neq 0$; $\quad \tilde{x} \in VF(\beta, n, t_1, t_2)$ valor aproximado de x
- $|e_x| = |x - \tilde{x}| \leq \dfrac{1}{2}10^{t-i} \Longrightarrow$ (por definição) a_i algarismo significativo de $\tilde{x}$

  $|e_x| = |x - \tilde{x}| \leq \frac{1}{2}10^{t-m} \Longrightarrow$ os m algarismos de $\tilde{x}$ são significativos.
- Sobre propagação de erros:

$$e_{f(\tilde{x})} = f(x) - f(\tilde{x}) \approx f'(x)e_{\tilde{x}}, \quad \delta_{f(\tilde{x})} = \frac{e_{f(\tilde{x})}}{f(x)} \approx \frac{x\, f'(x)}{f(x)}\, \delta_{\tilde{x}}$$

$$|cond_{f(x)}| = \Big|\frac{x\, f'(x)}{f(x)}\Big| \text{ (número de condição de } f(x) \text{ ou } p_{f(x)})$$

Nota: se $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$,

$$e_{f(\tilde{x})} = f(x) - f(\tilde{x}) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) e_{\tilde{x}_k}$$

$$\delta_{f(\tilde{x})} = \frac{e_{f(\tilde{x})}}{f(x)} \approx \sum_{k=1}^{n} p_{f,k}(x)\, \delta_{\tilde{x}_k}$$

$$p_{f,k}(x) = \frac{x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)}{f(x)} \qquad (1)$$

- A fórmula de erro para a subtração $z = x - y$ $(x, y \in \mathbb{R})$:

$$\delta_{\tilde{z}} = \frac{e_{\tilde{z}}}{z} = \frac{x}{x-y}\left(\frac{e_{\tilde{x}}}{x}\right) - \frac{y}{x-y}\left(\frac{e_{\tilde{y}}}{y}\right) = \frac{x}{x-y}\delta_{\tilde{x}} - \frac{y}{x-y}\delta_{\tilde{y}},$$

pode ser deduzida como uma aplicação de (1) aplicada a $f(x, y) = x - y$. Se x e y são muito próximos, note que $|\delta_{\tilde{z}}|$ pode ser muito grande, comparado com $\delta_{\tilde{y}}$ e $\delta_{\tilde{x}}$ (cancelamento subtrativo) . A propagação desse erro poderá levar a instabilidades numéricas num algoritmo.

II. Exercícios

Nota: Os números reais nesta ficha são representados em base decimal. Alguns dos exercícios aqui propostos serão feitos nas aulas teóricas. Como exemplo alguns terão uma solução abreviada. Bom trabalho para os restantes!

II.1) Representação dum número real em vírgula flutuante/erros cometidos/ algarismos significativos.

1. Os resultados aproximados da medição de uma ponte e de uma viga foram, respectivamente, 9999 cm e 9 cm. Sabendo que as medidas exatas correspondentes são 10000 cm e 10 cm, calcule

   (a) o erro absoluto da medição,

   (b) a percentagem de erro relativo da medição.

   Comente.

2. Considere um sistema que utiliza 4 dígitos na mantissa e arredondamento simétrico. Determine, nesse sistema, uma aproximação da área dum círculo de raio $r = 1$.
   Solução: $\tilde{x} = fl(x) = 0.3142 \times 10^1$.

3. Sabemos que $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$. Calcule a soma $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ num sistema de vírgula flutuante com 4 dígitos na mantissa e arredondamento por corte, e indique o erro obtido.

4. Represente x em vírgula flutuante com 4 dígitos na mantissa e arredondamento simétrico, nos seguintes casos

   a) $x = 1/6$ b) $x = 1/9$ c) $x = -95784$

   d) $x = -73785$ e) $x = 63798$ f) $x = 0.0023296$

   Obtenha a percentagem de erro cometido. E se ussase arredondamento por corte?

5. Quantos algarismos significativos tem $\tilde{x} = 0.9951$ como aproximação de $x = 0.9949$?

6. Dados

   a) $x = 1/3$ b) $x = 2111/701$ c) $x = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

   i) Represente x em vírgula flutuante com 6 dígitos na mantissa e arredondamento simétrico. Obtenha os erros absoluto e relativos, assim como a percentagem de erro cometido.

   ii) Obtenha aproximações de x com 4 algarismos significativos.

II.2) Propagação do erro, cancelamento subtrativo, instabilidade numérica e mau condicionamento.

1. A velocidade de um pára-quedas pode ser determinada pela equação

$$v(t) = \frac{gm}{c}\big(1 - e^{-(c/m)t}\big),$$

onde g designa a aceleração da gravidade, m a massa, e c é o coeficiente de resistência ao ar. Calcule $v(t)$ em $t = 6\,s$, se $g = 9.8$ m/s^2, $m = 50$ Kg e $c = 12.5\,Kg/s$. Estime o erro do resultado que se obteria se considerasse uma aproximação de c tal que $|c - \tilde{c}| \leq 2$.

2. Considere um triângulo rectângulo, tal que $d > 0$ representa o comprimento da hipotenusa e θ um dos seus ângulos internos agudos. O perímetro P do triângulo pode ser calculado através da expressão

$$P = d \times (1 + \sin(\theta) + \cos(\theta))$$

Admita que θ é aproximado pelo valor $\bar{\theta} = \pi/3$ e seja $\bar{P}$ o valor obtido para P. Mostre que o erro relativo de $\bar{P}$ é, aproximadamente,

$$|\delta_{P_{\bar{\theta}}}| \simeq \left| \frac{\pi(1-\sqrt{3})}{3(3+\sqrt{3})}\,\delta_{\bar{\theta}} \right|.$$

3. Sabe-se que os números $\bar{a} = 3.1415$ e $\bar{b} = -3.1425$ resultaram de arredondamentos simétricos para 5 dígitos decimais. Estime o erro absoluto do valor $\bar{y} = \tan(\bar{a} + \bar{b})/2$.

4. Sejam $x = \pi = 3.1415926...$ e $y = 2199/700 = 3.1414285....$

a) Considere um sistema que utiliza 4 dígitos na mantissa e arredondamento simétrico. Determine aproximações $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ de x e y, respectivamente, nesse sistema. Obtenha ainda $\tilde{z} = \tilde{x} - \tilde{y}$ (arredondado para 4 dígitos).
Solução: $\tilde{x} = fl(x) = 0.3142 \times 10^1$, $\tilde{y} = fl(y) = 0.3141 \times 10^1$. *Usando esses valores, tem-se* $\tilde{z} = 0.1 \times 10^{-2}$.

b) Determine a unidade U de arredondamento do sistema. Calcule os erros absolutos e relativos de $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, bem como as percentagens de erro. Comente.
Solução: *Tem-se* $U = 0.5 \times 10^{-3}$. *Erros relativos:* $|\delta_{\tilde{x}}| \simeq 0.131 \times 10^{-3}$, $|\delta_{\tilde{y}}| \simeq 0.137 \times 10^{-3}$. *Note que estes erros não excedem* U*, como seria de esperar.*

c) Calcule os erros absoluto e relativo de $\tilde{z}$ em relação a $z = x - y$.
Solução: *Tem-se* $|\delta_{\tilde{z}}| \simeq 5.10$, *ou seja,* $\tilde{z} = \tilde{x} - \tilde{y}$ *apresenta 510% de erro! Houve um grande aumento do erro relativo comparativamente aos erros de* $\tilde{x}$ *e* $\tilde{y}$.

d) Obtenha agora representações em vírgula flutuante com 6 algarismos na mantissa de x e y. Determine $fl\,(\,fl(x) - fl(y)\,)$ e o respectivo erro relativo. Note que houve melhoria nos resultados em relação a b) pelo facto de se terem utilizado mais algarismos na mantissa (ou seja uma maior precição).

5. Dada a função $f(x) = 1 - \cos x$, pretende-se determinar uma aproximação para $f(10^{-2})$, num sistema decimal de vírgula flutuante, com 4 dígitos na mantissa e arredondamento por corte. Calcule (use radianos) um valor aproximado para $\cos(10^{-2}) = 0.9999500004166...$ nesse sistema. Use esse valor para calcular uma aproximação para $f(10^{-2})$ (representando-a também no sistema) e determine o erro relativo dessa aproximação.
Solução: *Deve obter a aproximação:* $f(10^{-2}) \simeq 0.1000 \times 10^{-3}$, *com erro relativo* $\simeq 1$.

6. *(Teste Novembro 2013)* Considere um sistema de vírgula futuante de base 10 e 4 dígitos na mantissa, com arredondamento simétrico. Sendo dados $x = 8.765$ e $y = 8.766$, calcule uma aproximação para $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ nesse sistema e determine estimativas para o erro absoluto e erro relativo dessa aproximação. Comente.

7. *(Teste Novembro 2016)* Considere a função $\phi(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x}$,

   (a) Determine o número de condição de $\phi(x)$. Que pode dizer sobre o condicionamento para valores de x muito grandes?

   (b) Considere o seguinte algoritmo

   $$x, \quad z_1 = 1 + x, \quad z_2 = 1/x, \quad z_3 = 1/z_1, \quad z_4 = z_3 - z_2$$

   num sistema de ponto flutuante. Devido aos arredondamentos, verificou-se que para valores de $x >> 1$ (muito grandes) os valores correspondentes de $\phi(x)$ apresentaram erros relativos elevados. Como explica esse resultado? Apresente uma forma alternativa de calcular $\phi(x)$ que não conduza a esse tipo de erros.

Solução:

(a) Tem-se

$$|p_\phi(x)| = \left|\frac{x\phi'(x)}{\phi(x)}\right| = \left|\frac{x\left(-\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x}}\right| = x\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x}\right) = \left(1 + \frac{x}{1+x}\right) \approx 2, \text{ se } x >> 1.$$

Verificamos que o cálculo de $\phi(x)$ quando $x >> 1$ é um problema bem condicionado.
(b) No algoritmo associado à expressão $\phi(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{x}$ ocorre cancelamento subtrativo quando $x >> 1$, pois, neste caso, $x + 1 \approx x$. O algoritmo apresenta instabilidade numérica. Notando que $\phi(x) = -\dfrac{1}{(1+x)x}$, podemos considerar o algoritmo associado a esta última expressão de $\phi(x)$:

$$z_1 = 1 + x, \quad z_2 = x \times z_1, \quad z_3 = -1/z_2$$

o qual evita o cancelamento subtrativo quando $x >> 1$.

8. *(Exame Janeiro 2017).* Considere a função $f(x) = \sin x$.

   (a) Determine para que valores de x a função f é mal condicionada.
   Solução: Tem-se $\text{cond}_{f(x)} = \left|\dfrac{x\ f'(x)}{f(x)}\right| = \left|\dfrac{x\ \cos x}{\sin x}\right| = |x\ \cot x|$, que atinge números elevados para $x \simeq k\pi, k \neq 0$ (com k inteiro) e $|x| >> 1$.

   (b) Determine um majorante para o erro relativo que se comete no cálculo de $\sin(\tilde{x})$ sendo $\tilde{x}$ uma aproximação para $x = 3.14149$ com um erro relativo $|\delta_{\tilde{x}}| < 0.00005$.

9. *(Exame Janeiro 2017)* Pretende-se calcular $z = \ln(x) - \ln(y)$, para $x \simeq 2y$ e $x >> 1$, no sistema de vírgula flutuante $VF(10, 3, -30, 30)$, com arredondamento simétrico.

   (a) Mostre que o problema é bem condicionado.

   (b) Considerando $x = 6.9205 \times 10^6$ e $y = 3.4572 \times 10^6$, calcule z neste sistema, assim como o erro relativo do resultado obtido.

   (c) Indique uma forma alternativa de reduzir o erro relativo do valor calculado na alínea anterior.

10. Estude a função $\psi(x) = \dfrac{1}{1-x}$ no que respeita ao condicionamento.

    Em seguida, determine uma estimativa para o erro relativo de $\psi(\tilde{x})$, sendo $\tilde{x}$ uma aproximação para $x = 1.00000333...$ com um erro relativo $|\delta_{\tilde{x}}| < 0.00005$. Comente.

11. Determine os números de condição das funções:

    i) $f(x) = \sqrt{x}$

    ii) $f(x) = \exp(x)$

    iii) $f(x) = \sin x$.

    Mostre que no caso i) há redução do erro relativo quando se aplica f; no caso iii) f é mal condicionada para os valores: $x \approx k\pi, k \neq 0$ (k inteiro). E no caso ii)?

12. Sabe-se que 1.9999 e 3.14 resultam de arredondamentos simétricos.

    (a) Estime o erro absoluto do valor de $\text{sen}(1.9999 \times 3.14)$.

    Apresente todos os cálculos que efectuar.

    (b) Diga se a função $\psi(a, b) = \text{sen}(ab)$ é bem condicionada para pontos $(a, b) \neq (0, 0)$ tais que $ab \simeq 2k\pi$, dado $k > 0$. Justifique a sua resposta começando por calcular o número de condição da função $\psi(a, b)$.

13. Considere a função real de variável real

    $$f(x) := \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

    (a) Justifique que, para valores de x perto de zero, o cálculo de $f(x)$ constitui um problema bem condicionado, i.e., o número de condição de f em x é pequeno.

    (b) Determine $f(10^{-3})$. Considere o seguinte pseudocódigo para o cálculo de $f(10^{-3})$

    DO
    INPUT x
    $z_1 = \cos x, \quad z_2 = 1 - z_1, \quad z_3 = z_2/x^2$
    DISPLAY z_3
    ENDDO

    Que sucede se usar este pseudocódigo num sistema de vírgula flutuante com 6 dígitos na mantissa e arredondamento simétrico?

(c) Mostre que em geral o algoritmo correspondente é instável para x próximo de zero (apesar de o problema ser bem condicionado).