Matemática Computacional
Ficha 2 (Capítulo 2)
Métodos iterativos para equções não lineares
1s-2017/18, MEEC

I. Revisão da matéria/Formulário

Método da bissecção: $x_{k+1} = \dfrac{a_k + b_k}{2}, \quad f(a_k)f(b_k) < 0$

$$|x - x_{k+1}| \leq |x_{k+1} - x_k|, \qquad |x - x_k| \leq \frac{b-a}{2^k}$$

Método do ponto fixo: $x_{k+1} = g(x_k)$

$$|x - x_{k+1}| \leq \frac{L}{1-L}|x_{k+1} - x_k|,$$

$$|x - x_k| \leq L^k|x - x_0|, \qquad |x - x_k| \leq \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

$$e_{k+1} = \frac{(-1)^{p-1}g^{(p)}(\xi_k)}{p!}e_k^p \qquad \xi_k \in \mathrm{int}(z, x_k)$$

$$g^{(r)}(z) = 0,\ r = 1, \ldots, p-1,\ g^{(p)}(z) \neq 0$$

Método de Newton: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$$x - x_{k+1} = -\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}(x - x_k)^2,\ \xi_k \in \mathrm{int}(z, x_k)$$

$$|x - x_k| \leq \frac{1}{K}\left(K|x - x_0|\right)^{2^k}$$

Método da secante: $x_{k+1} = x_k - f(x_k)\dfrac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$

$$x - x_{k+1} = -\frac{f''(\xi_k)}{2f'(\eta_k)}(x - x_k)(x - x_{k-1}) \ (\xi_k, \eta_k \text{ num intervalo que contém } z, x_k \text{ e } x_{k-1})$$

$$|x - x_{k+1}| \leq K\,|x - x_k|\,|x - x_{k-1}|\,, \quad K = \frac{\max|f''|}{2\min|f'|}$$

II. Exercícios

II. 1 Método da bissecção

1. Seja $f(x) = -0.6x^2 + 2.4x + 5.5$.

   (a) Determine os zeros reais de f usando a fórmula resolvente.

   (b) Aproxime o maior zero de f pelo método da bissecção: considere a terceira iterada e $x_0 = 5$ como aproximação inicial. Compare os erros estimados do método com o erro real.

2. Num dado circuito elétrico, a voltagem V e a corrente I estão relacionadas pelas seguintes equações:

$$I = A(e^{BV} - 1), \quad C = DI + V,$$

   onde A, B, C, D são constantes que se supõem conhecidas. Assuma que $A.D = 14.3$, $C = 12$ e $D = B = 2$.

   (a) Obtenha uma equação para a voltagem V.

   (b) Verifique que esta equação tem uma única raiz V pertencente ao intervalo $[0, 0.5]$ e obtenha um valor aproximado de V pelo método da bissecção com erro inferior a 0.05.

   (c) Use Mathlab (ou Mathematica, etc.) para obter uma aproximação com erro inferior a 10^{-8}.

3. Considere a equação

$$\cos x - x = 0.$$

   (a) Prove que esta equação tem uma única raiz $z \in [0.7, 0.8]$.

   (b) Efectue 4 iterações pelo método da bissecção (ou seja, obtenha x_1, x_2, x_3, x_4) e indique um novo intervalo que contenha z.

   Solução: $x_4 = 0.74375$; $z \in I_4 = [0.7375, 0.74375]$

   (c) Calcule um majorante para o erro absoluto de x_2, ou seja, para $|z - x_2|$.

   Solução: *utilizando a fórmula de erro do método* $|z - x_k| \leq (b-a)/2^k$*, onde* $[a, b]$ *é o intervalo inicial, obtém-se* $|z - x_2| \leq 0.025$*. Note que esta fórmula permite estimar o erro de* x_k*, sem termos de calcular* x_k*.*

   (d) A partir da fórmula de erro acima, determine o número k de iterações necessárias para garantir $|z - x_k| < \epsilon$, com $\epsilon = 10^{-4}$.

   Solução: *basta impor* $(b-a)/2^k < \epsilon$*. Conclua que, a partir de* $k = 10$*, temos a garantia de* x_k *satisfazer a precisão requerida.*

4. A velocidade de um pára-quedas pode ser determinada pela equação

$$v(t) = \frac{gM}{c}\left(1 - e^{-(c/M)t}\right),$$

onde g designa a aceleração da gravidade, M a massa, e c é o coeficiente de resistência ao ar. Supondo que $c = 15Kg/s$, calcule pelo método da bissecção um valor aproximado da massa M para que $v(9) = 35m/s$. Use quatro iteradas. Obtenha uma estimativa do erro cometido. Use Mathlab (ou Mathematica, etc.) para obter uma aproximação com erro inferior a 10^{-5}. Repita com 10^{-10}. Comente.

5. Uma empresa estima que o lucro (em euros) da produção de x miligramas de um solvente é dada pela função:

$$L(x) := x^5 + 3x^3 - x.$$

   Aproxime, pelo método da bissecção com um erro inferior a 0.01, a quantidade de solvente que é necessário vender de modo a garantir um lucro de 1000 euros.

6. O volume V dum líquido num tanque esférico de rádio r está relacionado com a altura h ocupada pelo líquido através da expressão

$$V = \frac{\pi h^2(3r - h)}{3}.$$

   Determine uma aproximação para h, pelo método da bissecção, com um erro inferior a 10^{-3}, com $V = 0.5$ m^3 e $r = 1$ m.

7. Considere a equação $\quad 3x^2 - e^x = 0$

   (a) Prove que a equação tem uma única raiz $z \in [0, 1]$.
   Sugestão.: Um gráfico com base na igualdade $3x^2 = e^x$ sugere a existência duma raiz em $[0, 1]$. Faça um estudo da função $f(x) = 3x^2 - e^x$
   Solução.: *Tem-se $f(0) = -1$, $f(1) = 0.2817$. Então, pelo Teorema de Bolzano existe pelo menos uma raiz em $I =]0, 1[$. É única? Como $f'[0] = -1, f'[1.] = 3.281$, logo f' tem pelo menos um zero em I e, sendo $f''(x) = 6 - e^x > 0$ em I (tem apenas um zero em $x = 1.579 > 1$), então f' é crescente, e tem um único zero α, em I. Também se conclui que $f' < 0$ entre 0 e alpha e $f' > 0$ de α a 1. Então f é decrescente de 0 a α e crescente de α a 1. Podemos concluir que existe um único zero de f em I. Note que o gráfico de f tem o sentido da concavidade voltada para cima e as conclusões estão de acordo com o gráfico seguinte*

   (b) Determine um intervalo de comprimento igual a 0.1 que contenha z. Calcule um majorante para o erro da iterada x_{10} que se obteria pelo método da bissecção (não calcule x_{10}).

8. O fator de atrito F (adimensional) no escoamento dum fluido no interior dum tubo é dado pela equação de Colebrook-White

$$\frac{1}{\sqrt{F}} = -0.86 \ln\left(\frac{K}{3.7D} + \frac{2.51}{R_e\sqrt{F}}\right)$$

   onde K é a rugosidade da parede do tubo (m), R_e é o número de Reynolds (adimensional) e D é o diâmetro interno do tubo (m). Suponha que $R_e = 10^5$ e que $K/D = 10^{-4}$ e calcule aproximadamente F, pelo método da bissecção (usando 3 iteradas) aplicado no intervalo $[0.01, 0.02]$. Estimativa do erro cometido?

II.2 Método do ponto fixo

1. (Teste Janeiro 2017) Considere a função

$$f(x) = \ln(1+2x) - e^{-x}$$

Sabe-se que a equação $f(x) = 0$ tem uma única raiz $z \in (0.4, 0.6)$. Pretende-se aproximar z por um método iterativo da forma $x_{n+1} = g(x_n)$, $n \in \mathbf{N}_0$.

i) No caso de $g(x) = x - f(x)$, mostre que, começando com $x_0 = 0.5$, o método associado a g converge para z.

Solução: Seja $g(x) := x - \ln(1+2x) + e^{-x}$. Sendo g contínua em $\mathbf{R}$, se o método associado a g convergir, o limite é um ponto fixo. É preciso assegurar que z é ponto fixo de g, o que é verdade: $g(z) = z - f(z) = z - 0 = z$. Para provar que o método converge com $x_0 = 0.5$ é suficiente que se verifiquem as condições do teorema do ponto fixo em $I = [0.4, 0.5]$ (na verdade, $g(0.6) = 0.360354 < 0.4$ levou a esta escolha em vez de $[0.4, 0.6]$). Tem-se $g'(x) = 1 - \exp(-x) - \dfrac{2}{1+2x}$, $g \in C^1(I)$. Vejamos as outras condições.

- $g(I) \subset I$
  $g(0.4) = 0.482533 \in I$ e $g(0.5) = 0.413383 \in I$ Tem-se $g'(x) \leq 0$, $x \in I$, pois $g'(0.4) = -0.781431$, $g'(0.5) = -0.606531$, $g''(x) = \exp(-x) + 4/(1+2x)^2 > 0$. Então g decrescente $\Rightarrow 0.41338 = g(0.5) \leq g(x) \leq g(0.4) = 0.482533$, $\forall x \in I$.
- $\max|g'(x)| = L < 1$, $x \in I$.
  Como $g''(x) > 0$, $x \in I$, então g' decrescente e, sendo negativa, então$|g'|$ crescente, donde resulta que
  $0.606531 = |g'(-0.5)| \leq |g'(x)| \leq |g'(-0.4)| = 0.781431$, $\forall x \in I$, logo $L = 0.781431$.

ii) Calcule as iteradas x_1 e x_2 do método da alínea anterior, e obtenha um majorante para $|z - x_8|$.

Solução: Tem-se $x_1 = g(0.5) = 0.413383$, $x_2 = g(x_1) = 0.472244$. Um majorante para $|z - x_8|$ obtém-se fazendo $k = 8$ e $L = 0.781431$ na fórmula:
$|z - x_k| \leq \dfrac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$,
o que dá $|z - x_8| \leq 0.6361|0.413383 - 0.5| \simeq 0.0551004$

iii) No caso de $g(x) = x + f(x)$, pode usar a sucessão $x_0 = 0.7$, $x_{n+1} = g(x_n)$, $n \geq 1$ para aproximar z? Justifique <u>teoricamente</u>.

Solução: Notemos que, neste caso, $g'(x) = 1 + \exp(-x) + 2/(1+2x) > 1$, já que $\exp(-x) + 2/(1+2x) > 0$ em I. Então, cmo $z \in I$, necessariamente $g'(z) > 1$ e a sucessão do ponto fixo associada a g não pode convergir para z, a não ser que $x_i = z$, para algum $i \geq 0$. Logo não se pode usar este método para aproximar z (z é repulsor para g).

2. A acidez duma solução dum certo hidróxido em ácido hidrocloridrico vem dada por

$$A_{\text{acidez}}(x) = 1 + e^x + x^3 - 14x,$$

onde x representa a concentração de H3O+. Pretende-se determinar a concentração $z \in [0, 1]$ de H3O+ duma solução saturada deste hidróxido (solução com acidez nula). Seja

$$g(x) := \frac{1 + e^x + x^3}{14}.$$

(a) Considerando $x_0 = 0$, calcule 8 iteradas por este método. Diga intuitivamente, se a sucessão parece convergir e dê, caso afirmativo, o valor aproximado de z.

(b) Justifique que o método do ponto fixo associado à função iteradora g é convergente para z, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [0, 1]$.

(c) Considere $x_0 = 0$ e obtenha uma estimativa para o erro e_{x_8}. Repita o exercício com $x_0 = 0.5$. Comente.

3. Considere a sucessão de números reais definida por

$$z_0 = 1, \qquad z_{k+1} = 1 - \frac{1}{bz_k}, \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

onde b é um número real dado.

i) Com base no teorema do ponto fixo mostre que, se $b > 4$ esta sucessão converge e que todos os seus termos estão compreendidos entre $\frac{1}{2}$ e 1.

ii) Seja $b = \frac{25}{4}$. Através da definição de ponto fixo calcule $z = \lim_k z_k$.

iii) Para o valor de b da alínea anterior mostre que todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo $[\frac{4}{5}, 1]$ e que se tem:

$$|z_{k+1} - z| \leq \frac{4}{75}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

4. Com a finalidade de aproximar as raízes reais da equação

$$f(x) = x^4 + 2x - 1 = 0, \tag{1}$$

considere-se o método iterativo

$$x_{m+1} = g(x_m), m = 0, 1, 2, ... \tag{2}$$

com função iteradora

$$g(x) = x - (1/2)f(x) \tag{3}$$

(a) Mostre que os pontos fixos de g coincidem com as raízes reais da equação (1).
Sugestão. Mostre que $g(z) = z \Longleftrightarrow f(z) = 0$.

(b) Mostre que o método do ponto fixo (2) converge para a raiz positiva, z, da equação (1), se escolher x_0 no intervalo $I = [0.3, 0.6]$.

(c) Determine a ordem de convergência do método da alínea anterior, justificando.
Sugestão. Analise $g'(x)$

(d) Justifique a afirmação: z é um ponto fixo atractor de g.

(e) Mostre que não é possível usar o mesmo método (2) para obter uma aproximação da raiz negativa da equação $w \in [-1.3, -1.5]$. Conclua: w é um ponto fixo atractor ou repulsor de g?

5. Considere a equação de Kepler[1]

$$X - E\,\mathrm{sen}(X) = M \qquad (E_K)$$

(E : excentricidade, M : anomalia média, X : anomalia excêntrica) com $E = 0.2$ e $M = 0.5$

(a) Justifique que (E_K) tem uma única solução X no intervalo $[0, 1]$.

(b) Obtenha uma aproximação de X com 6 algarismos significativos, usando o método do ponto fixo com função iteradora $g(x) = 0.5 + 0.2\,\mathrm{sen}(X)$ e $x_0 = 0.5$. Justifique a convergência deste método, assim como a sua resposta.

6. A equação

$$f(x) = x(e^x - 1) - e^x = 0$$

tem uma raiz $z \in [-1, 0]$ outra $w \in [1, 2]$. Considere a função

$$g(x) = (x - 1)\,e^x.$$

(a) Mostre que z e w são pontos fixos de g.

(b) Mostre que a sucessão $x_{n+1} = g(x_n), n = 0, 1, ...$ converge para $z \in [-1, 0]$, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [-1, 0]$.

(c) Determine ainda a ordem de convergência da sucessão, justificando. Começando com $x_0 = -1$, obtiveram-se as aproximações seguintes para a sucessão de quocientes abaixo:

m	$\frac{\lvert z-x_{m+1}\rvert}{\lvert z-x_m\rvert}$
0	0.365354
1	0.356502
2	0.361116
3	0.359494
$\vdots$	$\vdots$

Diga, justificando, se os valores da tabela confirmam a ordem de convergência do método e obtenha um valor aproximado para o coeficiente assimptótico da convergência.

(d) Partindo de $x_0 = -1$ obtenha $x_1 = -0.73576$. Calcule, sem efectuar mais iterações, o número k tal que o erro absoluto de x_k, ou seja, $|z - x_k|$, não exceda 10^{-4}.

(e) Mostre que w é ponto fixo repulsor de g. Será possível escolher x_0 tal que a sucessão $x_{n+1} = g(x_n)$ seja convergente para o ponto fixo $w \in [1, 2]$?
Comente os resultados obtidos com a sucessão partindo de $x_0 = 1.2$ (para onde parece convergir?):
1.2, 0.664023, −0.652666, −0.86047, −0.78691, −0.81349, −0.803935, −0.807377, −0.806138, −0.806584, −0.806423

[1]Referência: P.M. Fitzpatrick, "Principles of celestial mechanics" , Acad. Press (1970)

7. Considere a função

$$f(x) = 1 - x^2 - 0.5\ e^{-x} \tag{4}$$

e mostre que que tem um único zero $w \in [0,1]$. Com o fim de aproximar w, considere a família de métodos iterativos $x_{m+1} = g_A(x_m)$, da forma:

$$x_{m+1} = x_m + A\, f(x_m), \quad m = 0, 1, 2, ...(A \neq 0)$$

   (a) i) Comece por verificar que a raiz w é ponto fixo de g_A, qualquer que seja $A \neq 0$.
   ii) No caso de $A = 1$, como classifica o ponto fixo w para a função g_1 (atractor ou repulsor?).
   iii) Mostre que, se $A = 1$ a sucessão converge para w, qualquer que seja x_0 escolhido no intervalo $I = [0.7, 1]$. (Recorra ao Teorema do ponto fixo)
   iv) Com $A = 1$, determine a ordem de convergência da sucessão, justificando.
   v) Tomando $x_0 = 1$, calcule x_1, x_2. Usando estes valores, obtenha um majorante para o erro $|w - x_2|$.

   (b) No caso de $A = 2$, seja $g_2(x)$ a função iteradora correspondente. Calcularam-se alguns elementos da sucessão (2), começando com $x_0 = 0.5$:
   $0.5, \quad 1.39347, \quad -0.738257, \quad -1.92059, \quad -14.12289, \quad -1.36027 \times 10^6,$
   $-1.79602 \times 10^{590756}...$
   Diga o que esses valores sugerem quanto à convergência (ou não) da sucessão para w. Experimente começar com outros valores para x_0 e calcule 5 iteradas. Como classifica o ponto fixo w para a função g_2 (atractor ou repulsor?).

8. (Teste de Julho, 1996) Considere a equação

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - e^{x/2} = 0.$$

Prove que esta equação tem uma única raíz z no intervalo $[0,1]$. Mostre que o método do ponto fixo com função iterado $g(x) = 2\ln\left((x + 1/2)^2\right)$ não converge para z qualquer que seja $x_0 \neq z$, $x_0 \in [0,1]$. Como forma de resolver este problema de convergência, use o exercício seguinte e indique qual a sucessão convergente que obteria.

9. Considere a equação $x = g(x)$ e suponha que a mesma tem uma única raíz z no intervalo $I = [a, b]$. Assuma que $g \in C^1(I)$. Supondo que $|g^{'}(x)| > 1$ para todo $x \in I$, prove que se a função inversa g^{-1} verifica que $g^{-1}(I) \subseteq I$, então o método do ponto fixo

$$x_{n+1} = g^{-1}(x_n), \ n = 0, 1, ...$$

converge para z qualquer que seja $x_0 \in I$.

II. 3 Método de Newton

1. Considere um circuito eléctrico com uma resistência (R), uma bobina (L) e um condensador (C) em paralelo. De acordo com as leis de Kirchhoff, a impedância $Z = Z(\omega)$ do circuito RLC pode ser expressa, em função da frequência angular ω, pela equação

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}\ .$$

Considere os seguintes valores para os parâmetros R, L e C:

$$R = 225\,\Omega\,[\text{ohm}], \quad C = 0.6 \times 10^{-6}\,F\,[\text{farad}], \quad L = 0.5\,H\,[\text{henry}]$$

e determine pelo método de Newton um valor aproximado de um dos valores de ω, que resultam numa impedância de $75\,\Omega$. Calcule 3 iteradas e ontenha uma estimativa do erro para esta aproximação.

2. Considere um triângulo rectângulo, tal que $d > 0$ representa o comprimento da hipotenusa e θ um dos seus ângulos internos agudos. Conforme já foi referido, o perímetro P do triângulo pode ser calculado através da expressão

$$P = d \times (1 + \sin(\theta) + \cos(\theta)). \tag{5}$$

Admitindo que $P = 11$ e $d = 5$ o objectivo deste exercício é encontrar o ângulo θ que satisfaz (5).

(a) Mostre que neste caso (5) tem duas soluções em $[0, \pi/2]$. Localize ambas as soluções em intervalos disjuntos.

(b) Estude se pode aproximar alguma destas soluções pelo método de Newton. Caso afirmativo, calcule 4 iteradas por este método. Analize o erro cometido.

3. (Teste de Novembro de 2016) Considere a equação

$$e^{2x} + 3x = 0 \tag{6}$$

i) Mostre que a equação (6) admite uma única raiz $z \in [-0.3, 0]$ e que o método de Newton converge monotonamente para z, começando com a aproximação inicial $x_0 = 0$.

Solução: Seja $f(x) := e^{2x} + 3x$, $f \in C^2(\mathbb{R})$, na verdade C^∞. Tem-se:

- $f(-0.3)f(0) < 0, \quad f'(x) = 2e^{2x} + 3 > 0$, o que garante a existência e unicidade de raiz em $[-0.3, 0]$;
- $f''(x) = 4e^{2x} > 0 \quad \forall x$, mantendo-se o sentido da concavidade
- Para $x_0 = 0$, vem $f(0) = 1 > 0$, verificando-se assim a condição

$$f(x_0)f''(x) > 0 \text{ para } x \in [-0.3, 0]$$

Esta condição assegura que se escolhe x_0 de modo a que as iteradas $x_1, x_2, ...$ se situem todas do mesmo lado de z (converg. monótona).

ii) Com $x_0 = 0$, calcule x_1 pelo método de Newton. Determine ainda um majorante para o erro absoluto de x_2, sem calcular x_2.

Solução: $x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = -f(0)/f'(0) = -0.2$. Note que a convergência monótona com $x_0 = 0 \Rightarrow z, x_k \in]-0.3, -0.2]$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Da fórmula do erro resulta, para esse intervalo mais pequeno, que

$$|z - x_2| \leq K(z - x_1)^2, \quad K = \frac{\max_{[-0.3,-0.2]} |f''|}{2 \min_{[-0.3-0.2]} |f'|} = \frac{f''(-0.2)}{2f'(-0.3)} = 0.32717$$

Podemos usar o fato de $-0.3 < z < x_1 < x_0 = 0$, onde $x_1 = -0.2$, para podermos considerar $|z - x_1| \leq 0.1$:

$$|z - x_2| \leq 0.32717(0.1)^2 = 0.00327175$$

OBS: Também é usual aplicar a fórmula de erro duas vezes:
$|z - x_1| \leq K(z - x_0)^2$, então

$$|z - x_2| \leq K(z - x_1)^2 \leq K^3(z - x_0)^4 \leq K^3(0.3)^4 = 0.000283665$$

Por este meio, obteve-se um majorante mais preciso.
Nota: Os alunos podiam resolver o exercício com o intervalo dado $[-0.3, 0]$.

iii) Considere a sucessão do ponto fixo definida por: $x_{n+1} = \dfrac{2x_n - e^{2x_n}}{5}$, $n \in \mathbb{N}_0$.
Mostre que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é convergente para a raiz da equação, qualquer que seja a aproximação inicial x_0 escolhida em $[-0.3, 0]$. Determine a ordem de convergência da sucessão.
Solução: A sucessão é da forma $x_{n+1} = g(x_n)$ e, se convergir, converge para um ponto fixo de g. É preciso assegurar que o zero de f é ponto fixo de g. Tem-se

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 5x - f(x) = 5x \Leftrightarrow 5x = 2x - e^{2x} \Leftrightarrow x = \frac{2x - e^{2x}}{5}$$

Condições do teorema do ponto fixo para g em $I = [-0.3, 0]$:

$$g(x) := \frac{2x - e^{2x}}{5}, \qquad g'(x) = \frac{2}{5}(1 - e^{2x}), \quad g \in C^1(I) \quad \text{(na verdade, } g \in C^\infty(\mathbb{R}))$$

- $g(I) \subset I$? Tem-se $g'(x) \geq 0,\ x \in [-0.3, 0]$, pois $g'(0) = 0$ e, para $x < 0$ tem-se $e^{2x} < 1$, logo $g'(x) > 0$. Então

  $$g \text{ crescente } \Rightarrow -0.229762 = g(-0.3) \leq g(x) \leq g(0) = -0.2, \ \forall x \in [-0.3, 0]$$

- $\max |g'(x)| = L < 1, \ \ x \in I$? Como $g''(x) < 0,\ x \in I$, então

  $$g' \text{ decrescente } \Rightarrow 0.131872 = g'(-0.2) \leq g'(x) \leq g'(-0.3) = 0.180475, \ \forall x \in [-0.3, -0.2]$$

  E tem-se $\ L = 0.180475$. Nas condições do teorema do pto. fixo, sabe-se que:

  $$\lim_{m\to\infty} \frac{|z - x_{m+1}|}{|z - x_m|} = |g'(z)|$$

  Vimos que
  $g'(x) > 0$ para $\ x \in [-0.3, 0)$, a que z pertence, logo $g'(z) \neq 0$, o que implica que o limite acima é diferente de zero. Pela definição de ordem de convergência, vem que a ordem do método é 1 e o coeficiente assintótico $K_\infty = |g'(z)|$.

4. Considere a equação $f(x) = 0$, onde a função

$$f(x) = sin(x) - |x^2 - 4| \qquad \text{tem dois zeros positivos.}$$

(a) Mostre que a equação tem uma única raiz em $[1.6, 1.8]$. Quantas iterações serão necessárias para obter uma aproximação do valor dessa raiz, se utilizar o método da bissecção e pretender que o erro cometido seja inferior a 10^{-6} ?

(b) Verifique se estão satisfeitas as condições de convergência do método de Newton para aproximar a maior das raízes, considerando o intervalo $I = [1.9, 2.4]$ e escolhendo $x_0 = 1.9$. Justifique convenientemente a resposta.

(c) Escolha um x_0 de modo a que o método de Newton convirja para a maior das raízes. Calcule a iterada x_3 do método de Newton.

(d) Nas condições da alínea anterior, determine a ordem de convergência do método de Newton e uma aproximação para o coeficiente assimptótico de convergência.

5. Escreva a expressão geral do método de Newton aplicado à equação $f(x) = 0$, onde f é a função definida por (4).

   (a) Sendo o método de Newton um método do ponto fixo, diga qual é a função geradora (ou iteradora) G. A raiz w é ponto fixo dessa G?

   (b) Mostre que o método converge para w, qualquer que seja a iterada inicial x_0 pertencente ao intervalo $[0.7, 1]$.

   (c) Com $x_0 = 0.7$, calcule x_1, x_2. Determine ainda um majorante para o erro da iterada x_4 (sem calcular mais iteradas).

   (d) Indique duas escolhas para x_0 de modo a ter-se convergência monótona.

   (e) Determine a ordem de convergência do método de Newton (justifique com base nos resultados sobre a ordem de convergência dos métodos do ponto fixo). Tomando para aproximação de w o valor 0.891632, calcule uma aproximação para o coeficiente assimptótico da convergência K_∞.

   (f) Na sequência da alínea anterior, compare o método de Newton com o método considerado na questão 3.a) iv, no que respeita à rapidez de convergência.

   (g) Se pretendermos aplicar o método da secante[2] à equação considerada na alínea anterior, como escolher as iteradas iniciais x_0, x_{-1} de modo a garantir convergência do método para w?

[2] Não foi dado na aula; ver bibliografia