Matemática Computacional
Ficha 3 (Capítulo 3)
Métodos iterativos para sistema de equações
1s-2017/18, MEEC

I. Revisão da matéria/Formulário

Normas e Condicionamento

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{A}^{-1}\|$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \|\delta_{\tilde{\mathbf{x}}}\| \le \frac{\text{cond}(\mathbf{A})}{1-\text{cond}(\mathbf{A})\,\|\delta_{\tilde{\mathbf{A}}}\|}\,(\|\delta_{\tilde{\mathbf{A}}}\| + \|\delta_{\tilde{\mathbf{b}}}\|) \qquad (\mathbf{Ax}=\mathbf{b})$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = (\rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A}))^{1/2}$$

Métodos iterativos para sistemas lineares

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{Cx} + \mathbf{d} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{Cx}^{(k)} + \mathbf{d}$$

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(k)}\| \le \|\mathbf{C}\|^k \|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(0)}\|, \qquad \|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(k)}\| \le \frac{\|\mathbf{C}\|^k}{1-\|\mathbf{C}\|}\|\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^{(0)}\|$$

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(k+1)}\| \le \frac{\|\mathbf{C}\|}{1-\|\mathbf{C}\|}\|\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}\|$$

Método de Jacobi: $C = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})$ $\qquad x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1,j\ne i}^{n} a_{ij}\,x_j^{(k)})/a_{ii}$

Método de Gauss-Seidel:

$$C = -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}$$
$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\,x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\,x_j^{(k)})/a_{ii}$$

Importante: a ordem das equações num sistema pode interferir com a convergência dos métodos!

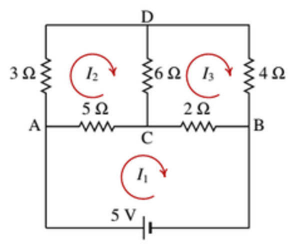
Método de Newton para sistemas não-lineares

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \qquad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}$$

II. Exercícios

II. 1 Condicionamento

1. Considere o seguinte circuito eléctrico simples



   Determine o número de condição da matriz do sistema que teria que resolver para determinar a corrente i_j $(j = 1, 2, 3)$ usando as leis de Kirchoff (use a norma $\|\cdot\|_\infty$). Caso lhe digam, por lapso, que o valor da fonte de potência é 4.88 V, dê uma estimativa do erro cometido ao calcular a corrente com esta informação errada.

2. Considere o sistema linear $A\mathbf{x} = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Sabendo que $\|A^{-1}\|_\infty = 2/15\,\|A\|_1$, calcule o número de condição $\mathrm{cond}_\infty(\mathrm{A})$ e diga qual a sua relação com o erro na solução do sistema quando o vector b está afetado de erros.
   Resolução: Tem-se $\|A\|_\infty = \max\{3/2, 3/2, 4\} = 4$ e $\|A\|_1 = \max\{35/2, 3/2, 3\} = 3 \to$ $\|A^{-1}\|_\infty = 2/5$, donde $\mathrm{cond}_\infty(\mathrm{A}) = \|\mathrm{A}\|_\infty\,\|\mathrm{A}^{-1}\|_\infty = 8/5$.

   Ao resolver um sistema $A\mathbf{x} = b$ em que o vetor b foi perturbado, passamos a resolver $A\tilde{x} = \tilde{b}$, sendo válida a fórmula de majoração do erro relativo da solução: $\|\delta_{\tilde{\mathbf{x}}}\|_\infty \leq \mathrm{cond}(A)\,\|\delta_{\tilde{b}}\|_\infty$. Concluímos que o erro relativo da solução vem majorado por $(2/15)\|\delta_{\tilde{b}}\|_\infty$.

3. Seja $||\cdot||$ una norma matricial induzida por uma norma vectorial $||\cdot||_{\mathbb{R}^n}$. Prove que para cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\rho(A) \leq ||A||$$

   onde $\rho(A)$ designa o raio espectral da matriz A. Dê uma estimativa de $||A||_2$ sendo A a matriz do exercício anterior.

4. Considere a matriz

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Usando o método de Newton, aproxime as soluções do polinómio característico associado a A (valores própios). Dê um valor aproximado do raio espectral $\rho(A)$ e consequentemente uma estimativa de $||A||_2$.

5. Determine o número de condição da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

na norma $||.||_2$. Confirme a estimativa do exercício 3).

6. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}$$

e considere o sistema $Ax = b$, com $b = [1\ 10^{-6}]^T$. Verifique que a sua solução exacta é $x = [1\ 1]^T$.

   (a) Determine $cond(A)$ na norma $||\cdot||_\infty$.
   (b) Considere o sistema $A\tilde{x} = \tilde{b}$, onde $\tilde{b} = [1+\epsilon, \quad 10^{-6}]^T$. Obtenha $||\delta_{\tilde{b}}||_\infty$ e $||\delta_{\tilde{x}}||_\infty$. Comente.
   (c) Considere ainda o sistema $A\bar{x} = \bar{b}$, onde $\bar{b} = [1, \quad 2\times 10^{-6}]^T$. Obtenha $||\delta_{\bar{b}}||_\infty$ e $||\delta_{\bar{x}}||_\infty$. Comente.

7. Seja A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0.00005 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Determine o número de condição da matriz A na norma $||.||_1$;
   (b) Ao resolver um sistema com a matriz A, sabendo-se que o segundo membro é afectado por um erro cuja norma, em termos relativos, satisfaz $\|\delta_b\|_1 \leq \epsilon$, determine um majorante da norma correspondente do erro relativo da solução.

8. Seja a matriz

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Calcule o número de condição associado às normas $||\cdot||_\infty$, $||\cdot||_1$ e $||\cdot||_2$.

Com o auxilio do Mathematica trace o gráfico de $\mathrm{cond}_1(A)$ em função do parámetro a. Comente.

9. Considere as matrizes

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \tilde{a} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

onde a, $\tilde{a} \in \mathbb{R}$ e $\tilde{a}$ é uma aproximação de a. Suponhamos que ao resolver o sistema $\tilde{A}\tilde{x} = b$ se obteve a solução $\tilde{x} = (1, 1, 1)$. Se $\tilde{a}$ está afectado dum erro de valor absoluto não superior a ε, determine um majorante de $||x - \tilde{x}||_\infty$, onde x é a solução de $Ax = b$.

10. Considere um sistema de duas equações lineares $Ax = b$, onde $\mathbf{b} = [b_1 \quad b_2]^{\mathrm{T}}$ e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1+\epsilon \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Classifique o sistema quanto ao condicionamento, para valores de ϵ tais que $0 < \epsilon \ll 1$ (ϵ próximo de 0). Use a norma $\| \cdot \|_\infty$.

11. Seja

$$A := \begin{pmatrix} 10^{-6} & 0 & 1 \\ 1 & 10^{-6} & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e considere o sistema $Ax = b$, com $b = [1 \ 3 \ 2]^T$.

(a) Determine $cond(A)$ na norma $|| \cdot ||_\infty$.

(b) Obtenha a solução de $Ax = b$ pelo método de eliminação de Gauss usando um sistema de vírgula flutuante com 6 algarismos na mantissa e arredondamento simétrico (base decimal) de duas formas: sem e com pesquisa parcial de pivot. Comente.

II. 2 Métodos iterativos para sistemas lineares

1. Num atelier de design produzem-se três peças: P_i, $i = 1, 2, 3$ a partir de chapas finas de cobre, prata e zinco. O número de chapas necessárias para cada peça são indicadas na tabela:

Peças	cobre	prata	zinco
P_1	2	1	0
P_2	2	3	0
P_3	0	1	2

Em Novembro este atelier tem disponíveis 100 chapas tanto de zinco como de cobre, e 150 chapas de prata.

(a) Obtenha o sistema que permite determinar o número de peças de cada tipo que poderão ser produzidas em Novembro, assim como a sua solução exacta.

(b) Aproxime a solução do sistema recorrendo ao método de Jacobi e quatro iteradas. Use uma aproximação inicial à escolha. Calcule os erros cometidos.

2. Considere o sistema $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule a sua solução exacta.

(b) Obtenha duas iteradas pelo método de Gauss-Seidel, tomando $x^{(0)} = (0.6, 0.85, 0.9)$.

(c) Calcule os erros cometidos.

3. Considere o seguinte método iterativo

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.1x_2^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} = -0.1x_1^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 1 \\ x_3^{(k+1)} = -0.1x_1^{(k)} - 0.1x_2^{(k)} + 1 \end{cases}$$

para aproximar a solução de um sistema linear $Ax = b$.

(a) Escreva a matriz de iteração deste método. Pode tratar-se do método de Gauss-Seidel? Justifique.

(b) Sabendo que $b = [1, 1, 1]^T$ determine A e a respectiva solução do sistema.

(c) Obtenha 3 iterações e estude os erros cometidos (considere uma aproximação inicial à escolha).

(d) Pode tratar-se do método de Jacobi? Justifique.

4. Pretende-se resolver um certo sistema $A\,x = b$, onde A é uma matriz triangular superior, partindo de uma aproximação inicial arbitrária.

(a) Se aplicarmos o método de Gauss-Seidel, podemos garantir que a solução exacta é obtida com um número finito de iterações. Justifique e diga quantas. (**Sugestão:** estude as várias potências da matriz de iteração. Relação com o erro?)

(b) A mesma pergunta, em relação ao método de Jacobi.

5. O sistema de equações lineares, $A\,x = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix} x = b$$

pode, sob certas condições, ser resolvido pelo método iterativo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega\, a & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1-\omega & \omega\, a \\ 0 & 1-\omega \end{bmatrix} x^{(k)} + \omega\, b$$

(a) Para que valores de a o método converge se $\omega = 1$? **Solução:** $a \in]-1, 1[$

(b) se $a = -1/2$ e $\omega = 1/2$ o método converge? **Solução:** Sim.

6. Considere o sistema $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 8 \\ 2 & -7 & -10 \\ 10 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -23 \\ 34 \end{bmatrix}$$

   (a) É possível reordenar as linhas do sistema de modo que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel sejam convergentes? Justifique.

   (b) Considere o novo sistema (equivalente). Com $\mathbf{x}^{(0)} = [1\ 1\ 1]^T$ calcule quatro iteradas com ambos os métodos. Comente.

7. Considere o sistema linear da forma $Av = h$, com $h = [1\ 2\ 3]^T$ e

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

   Mostre que é possível transformar o sistema linear acima num equivalente, de modo a poder garantir que o método de Gauss-Seidel converge. Em seguida, efectue uma iteração do método de Gauss-Seidel, começando com iterada inicial $v^{(0)} = [2\ \ 1\ \ -2]^T$.

8. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ x_1 & + & x_2 & + & 10x_3 & = & 12 \\ 10x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 12 \end{cases}$$

   (a) Pretende-se aproximar a solução do sistema pelo método de Jacobi. Reordene as linhas de modo a que matriz do novo sistema tenha a diagonal estritamente dominante. Que conclui sobre a convergência do método de Jacobi?
   Curiosidade. *Determine as matrizes de iteração C_J e C_J^* associadas, respectivamente, ao sistema inicial e depois da reordenação e calcule os seus valores próprios.*
   Com o Mathematica obtém-se $\{11, (-11 + 9i\sqrt{3})/2, (-11 - 9i\sqrt{3})/2\}$ *(para C_J)*
   e $\{0.2, -0.1, -0.1\}$ *(para C_J^*).*

   (b) Aplique o método de Jacobi ao novo sistema e efectue 4 iterações. Calcule um majorante para o erro da 4 iterada numa norma adequada. Considere $\mathbf{x}^{(0)} = [-4, -4, -4]^T$.
   Solução: As componentes de cada iterada são iguais entre si: $\mathbf{x}^{(1)} = [2, 2, 2]^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = [4/5, ..]^T$ $\mathbf{x}^{(3)} = [26/25, ..]^T$, $\mathbf{x}^{(4)} = [124/125, ..]^T$; $||\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(4)}||_\infty \leq 0.012$ (Pode usar outra norma?)

   (c) Aplique o método de Gauss-Seidel até que $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}|| < 10^{-2}$. Conclua sobre o erro da iterada $\mathbf{x}^{(k)}$.

9. Considere um sistema de duas equações na forma geral:

$$(I) \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{cases}$$

   onde $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

(a) Mostre que os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para qualquer aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ se e só se $|m| < 1$, onde $m = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$.

(b) No caso do método de Jacobi, mostre que se a matriz do sistema tiver a diagonal estritamente dominante, por linhas, se verifica

$$||\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}||_\infty \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}||\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}||_\infty$$

onde $\mathbf{x}$ é a solução do sistema, $\mathbf{x}^{(k)}$ é a k-ésima iterada e $\alpha = max\left(\frac{|a_{12}|}{|a_{11}|}, \frac{|a_{21}|}{|a_{22}|}\right)$.

(c) Considere o sistema

$$\begin{cases} 3x & + & y & = & 8 \\ x & + & 2y & = & 4 \end{cases}$$

Efectue a primeira iteração do método de Jacobi, partindo da aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [2, 1]^T$. Com base na alínea (b), determine um majorante do erro do resultado obtido.

(d) Nas condições da alínea anterior, quantas iterações do método de Jacobi são necessárias para garantir que seja satisfeita a condição $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}||_\infty < 0.001$?

10. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + z & = & 2 \\ -x + y & = & 0 \\ x + 2y - 3z & = & 0 \end{cases}.$$

(a) Prove que o método de Jacobi converge para a solução exacta deste sistema, qualquer que seja a aproximação inicial.

(b) Mostre que, no caso de se usar o método de Gauss-Seidel, não está garantida a convergência para qualquer aproximação inicial. Indique uma aproximação inicial $x^{(0)}$ (diferente da solução exacta), tal que a sucessão $\{x^{(k)}\}$ seja convergente; e uma aproximação inicial $\tilde{x}^{(0)}$, partindo da qual o método divirja.

11. Considere o sistema linear $Ax = b$, com $b = [2\ \ 4\ \ 15]^T$ e, sendo a número real,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & a & -1 \\ 0 & 2 & a+1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine um intervalo (ou união de intervalos) de valores que o parâmetro a pode tomar, de forma a garantir a convergência do método de Jacobi qualquer que seja a iterada inicial. Justifique todos os cálculos.

(b) Com $a = 4$ e, partindo do vector inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [1\ \ 2\ \ 1]^T$, determine duas iteradas do método de Jacobi para aproximar $\mathbf{x}$.

(c) Mostre que é válida a seguinte fórmula para os erros do método de Jacobi usando uma norma conveniente:

$$||\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k+1)}|| \leq \beta\,||\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}||.$$

Justifique a norma escolhida e determine a constante β.

(d) Calcule um majorante para a norma $||\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(2)}||$.

12. Seja o sistema linear $Ax = b$ onde $b = [2 \;\; 1 \;\; 2]^T$ e A tem a forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & a & 1 \\ 0 & b & a \end{bmatrix}.$$

Mostre que qualquer que seja $x^{(0)} \in R^3$, o método de Jacobi converge para a solução do sistema se e só se for satisfeita a condição $|a| > \sqrt{2|b|}$

13. Considere o seguinte sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verifique que este sistema pode ser resolvido por um processo iterativo da forma

$$x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + C$$

Identifique a matriz B e o vector C. Se $x^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T$ estime a norma do erro de $x^{(n)}$.

14. (Exame 11/01/2005) Considere o método iterativo

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + b, \quad k \in \mathbb{N},\; x^{(0)} \in \mathbb{R}^4,$$

onde

$$C := \begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 & -1/6 & 1/6 \\ 0 & 2/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 0 & -1/6 \end{bmatrix}$$

e b:= (1,0,1,0).

(a) Mostre que qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^4$, este método iterativo converge para a solução do sistema linear $(I - C)x = b$.

(b) Considere $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)$ e efectue duas iteradas. Obtenha uma estimativa para o erro $||x - x^{(2)}||$.

15. Considere o sistema linear $Ax = b$ com

$$A := \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2\alpha \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b := (1, 0, 1).$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que tanto o método iterativo de Jacobi como o de Gauss-Seidel convergem para a solução deste sistema, qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ se e só se $|\alpha| < 4/3$. Prove também que o método de Gauss-Seidel converge mais rapidamente, desde que $\alpha \neq 0$. Como é que os dois métodos convergem quando $\alpha = 0$?

(b) Seja $\alpha = 1/2$ e $x^{(0)}$ o vector nulo. Calcule as três primeiras iteradas pelo método de Gauss-Seidel. Obtenha uma estimativa para o erro $||x - x^3||_\infty$.

II. 3 Métodos iterativos para sistemas não-Lineares

1. (*EXAME 28.07.97*) Pretende-se resolver pelo método de Newton o seguinte sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2(x_3+1) & = 10 \\ 3(x_2+1) + x_3^2 & = 11 \\ 3x_1 + x_3^2 & = 9 \end{cases}$$

tomando como aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [3\ 2\ 1]^T$.

   (a) Mostre que o sistema linear $\mathbf{Av} = \mathbf{b}$ a ser resolvido para se obter $\mathbf{x}^{(1)}$ é tal que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   Obtenha ainda o vector $\mathbf{b}$.

   (b) Resolva o sistema linear obtido em **2.a)**, pelo método de eliminação de Gauss e obtenha $\mathbf{x}^{(1)}$.

2. (*EXAME 09.07.92*) Pretende-se resolver pelo método de Newton o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} e^x - 3 = 0 \\ 3y + 4z = 3 \\ 2x^2 + 2x + 2z = 1 \end{cases}$$

   (a) Tomando como aproximação inicial $[x_0, y_0, z_0]^T = [0, 1, 2]^T$, ao efectuar uma iteração pelo método de Newton, somos conduzidos a resolver um certo sistema de equações lineares. Qual?

   (b) Resolva o sistema de equações lineares obtido na alínea anterior, utilizando o método de Gauss-Seidel, considerando como aproximação inicial o vector nulo e efectuando duas iterações.

3. Considere o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\begin{cases} x^3 + 5y - 2z = 0 \\ e^y - z^2 = 1 \\ -x^2 + y + z = \mu, \end{cases}$$

onde μ é um número real conhecido, próximo de 0. Para aproximar uma solução deste sistema pretende-se utilizar o método de Newton. Tomando como aproximação inicial o vector $\mathbf{x}^{(0)} = (c, 0, 0)$, onde c é um certo número real, para obter a aproximação $\mathbf{x}^{(1)}$ somos levados a resolver um sistema linear com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3c^2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2c & 1 & 1. \end{bmatrix}$$

   (a) Mostre como se obteve esta matriz e calcule o segundo membro do sistema.

(b) Factorize a matriz pelo método de Doolittle e diga para que valores de c o sistema linear considerado tem solução única.

(c) No caso de se aplicar o método de Jacobi para resolver o sistema linear, diga para que valores de c está garantida a condição necessária e suficiente de convergência do método.

(d) No caso de $c = 1$, resolva o sistema pelo método de Jacobi e calcule $\mathbf{x}^{(1)}$ (primeira iterada do método de Newton).