

Matemática Computacional
Ficha 3 (Capítulo 3)
Métodos iterativos para sistema de equações
1s-2017/18, MEEC

I. Revisão da matéria/Formulário

Normas e Condicionamento

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| & \text{cond}(\mathbf{A}) &= \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \\ \|\mathbf{A}\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| & \|\delta_{\tilde{\mathbf{x}}}\| &\leq \frac{\text{cond}(\mathbf{A})}{1 - \text{cond}(\mathbf{A}) \|\delta_{\tilde{\mathbf{A}}}\|} (\|\delta_{\tilde{\mathbf{A}}}\| + \|\delta_{\tilde{\mathbf{b}}}\|) \quad (\mathbf{Ax} = \mathbf{b}) \\ \|\mathbf{A}\|_2 &= (\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A}))^{1/2} \end{aligned}$$

Métodos iterativos para sistemas lineares

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{Cx} + \mathbf{d} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{Cx}^{(k)} + \mathbf{d}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\| &\leq \|\mathbf{C}\|^k \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}\|, & \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\| &\leq \frac{\|\mathbf{C}\|^k}{1 - \|\mathbf{C}\|} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\| \\ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k+1)}\| &\leq \frac{\|\mathbf{C}\|}{1 - \|\mathbf{C}\|} \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \end{aligned}$$

Método de Jacobi: $C = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) \quad x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)})/a_{ii}$

Método de Gauss-Seidel:

$$\begin{aligned} C &= -(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \mathbf{U} \\ x_i^{(k+1)} &= (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)})/a_{ii} \end{aligned}$$

Importante: a ordem das equações num sistema pode interferir com a convergência dos métodos!

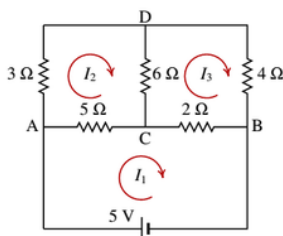
Método de Newton para sistemas não-lineares

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \Delta \mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}$$

II. Exercícios

II. 1 Condicionamento

1. Considere o seguinte circuito eléctrico simples



Determine o número de condição da matriz do sistema que teria que resolver para determinar a corrente i_j ($j = 1, 2, 3$) usando as leis de Kirchoff (use a norma $\|\cdot\|_\infty$). Caso lhe digam, por lapso, que o valor da fonte de potência é 4.88 V, dê uma estimativa do erro cometido ao calcular a corrente com esta informação errada.

2. Considere o sistema linear $A\mathbf{x} = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que $\|A^{-1}\|_\infty = 2/15 \|A\|_1$, calcule o número de condição $\text{cond}_\infty(A)$ e diga qual a sua relação com o erro na solução do sistema quando o vector b está afetado de erros.

Resolução: Tem-se $\|A\|_\infty = \max\{3/2, 3/2, 4\} = 4$ e $\|A\|_1 = \max\{35/2, 3/2, 3\} = 3 \rightarrow \|A^{-1}\|_\infty = 2/5$, donde $\text{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 8/5$.

Ao resolver um sistema $A\mathbf{x} = b$ em que o vector b foi perturbado, passamos a resolver $A\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{b}$, sendo válida a fórmula de majoração do erro relativo da solução: $\|\delta_{\tilde{\mathbf{x}}}\|_\infty \leq \text{cond}(A) \|\delta_{\tilde{b}}\|_\infty$. Concluimos que o erro relativo da solução vem majorado por $(2/15)\|\delta_{\tilde{b}}\|_\infty$.

3. Seja $\|\cdot\|$ uma norma matricial induzida por uma norma vectorial $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$. Prove que para cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

onde $\rho(A)$ designa o raio espectral da matriz A . Dê uma estimativa de $\|A\|_2$ sendo A a matriz do exercício anterior.

4. Considere a matriz

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Usando o método de Newton, aproxime as soluções do polinómio característico associado a A (valores próprios). Dê um valor aproximado do raio espectral $\rho(A)$ e consequentemente uma estimativa de $\|A\|_2$.

5. Determine o número de condição da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

na norma $\|\cdot\|_2$. Confirme a estimativa do exercício 3).

6. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}$$

e considere o sistema $Ax = b$, com $b = [1 \ 10^{-6}]^T$. Verifique que a sua solução exacta é $x = [1 \ 1]^T$.

(a) Determine $\text{cond}(A)$ na norma $\|\cdot\|_\infty$.

(b) Considere o sistema $A\tilde{x} = \tilde{b}$, onde $\tilde{b} = [1 + \epsilon, \ 10^{-6}]^T$. Obtenha $\|\delta_{\tilde{b}}\|_\infty$ e $\|\delta_{\tilde{x}}\|_\infty$.
Comente.

(c) Considere ainda o sistema $A\bar{x} = \bar{b}$, onde $\bar{b} = [1, \ 2 \times 10^{-6}]^T$. Obtenha $\|\delta_{\bar{b}}\|_\infty$ e $\|\delta_{\bar{x}}\|_\infty$. Comente.

7. Seja A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0.00005 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine o número de condição da matriz A na norma $\|\cdot\|_1$;

(b) Ao resolver um sistema com a matriz A , sabendo-se que o segundo membro é afectado por um erro cuja norma, em termos relativos, satisfaz $\|\delta_b\|_1 \leq \epsilon$, determine um majorante da norma correspondente do erro relativo da solução.

8. Seja a matriz

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Calcule o número de condição associado às normas $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$.

Com o auxílio do Mathematica trace o gráfico de $\text{cond}_1(A)$ em função do parâmetro a .
Comente.

9. Considere as matrizes

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \tilde{a} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

onde $a, \tilde{a} \in \mathbb{R}$ e \tilde{a} é uma aproximação de a . Suponhamos que ao resolver o sistema $\tilde{A}\tilde{x} = b$ se obteve a solução $\tilde{x} = (1, 1, 1)$. Se \tilde{a} está afectado dum erro de valor absoluto não superior a ε , determine um majorante de $\|x - \tilde{x}\|_\infty$, onde x é a solução de $Ax = b$.

10. Considere um sistema de duas equações lineares $Ax = b$, onde $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2]^T$ e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 + \epsilon \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Classifique o sistema quanto ao condicionamento, para valores de ϵ tais que $0 < \epsilon \ll 1$ (ϵ próximo de 0). Use a norma $\|\cdot\|_\infty$.

11. Seja

$$A := \begin{pmatrix} 10^{-6} & 0 & 1 \\ 1 & 10^{-6} & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e considere o sistema $Ax = b$, com $b = [1 \ 3 \ 2]^T$.

- (a) Determine $\text{cond}(A)$ na norma $\|\cdot\|_\infty$.
(b) Obtenha a solução de $Ax = b$ pelo método de eliminação de Gauss usando um sistema de vírgula flutuante com 6 algarismos na mantissa e arredondamento simétrico (base decimal) de duas formas: sem e com pesquisa parcial de pivot. Comente.

II. 2 Métodos iterativos para sistemas lineares

1. Num atelier de design produzem-se três peças: P_i , $i = 1, 2, 3$ a partir de chapas finas de cobre, prata e zinco. O número de chapas necessárias para cada peça são indicadas na tabela:

Peças	cobre	prata	zinco
P_1	2	1	0
P_2	2	3	0
P_3	0	1	2

Em Novembro este atelier tem disponíveis 100 chapas tanto de zinco como de cobre, e 150 chapas de prata.

- (a) Obtenha o sistema que permite determinar o número de peças de cada tipo que poderão ser produzidas em Novembro, assim como a sua solução exacta.

- (b) Aproxime a solução do sistema recorrendo ao método de Jacobi e quatro iteradas. Use uma aproximação inicial à escolha. Calcule os erros cometidos.

2. Considere o sistema $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Calcule a sua solução exacta.
 (b) Obtenha duas iteradas pelo método de Gauss-Seidel, tomando $x^{(0)} = (0.6, 0.85, 0.9)$.
 (c) Calcule os erros cometidos.

3. Considere o seguinte método iterativo

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.1x_2^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} = -0.1x_1^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 1 \\ x_3^{(k+1)} = -0.1x_1^{(k)} - 0.1x_2^{(k)} + 1 \end{cases}$$

para aproximar a solução de um sistema linear $Ax = b$.

- (a) Escreva a matriz de iteração deste método. Pode tratar-se do método de Gauss-Seidel? Justifique.
 (b) Sabendo que $b = [1, 1, 1]^T$ determine A e a respectiva solução do sistema.
 (c) Obtenha 3 iterações e estude os erros cometidos (considere uma aproximação inicial à escolha).
 (d) Pode tratar-se do método de Jacobi? Justifique.
4. Pretende-se resolver um certo sistema $Ax = b$, onde A é uma matriz triangular superior, partindo de uma aproximação inicial arbitrária.
- (a) Se aplicarmos o método de Gauss-Seidel, podemos garantir que a solução exacta é obtida com um número finito de iterações. Justifique e diga quantas. (**Sugestão:** estude as várias potências da matriz de iteração. Relação com o erro?)
 (b) A mesma pergunta, em relação ao método de Jacobi.

5. O sistema de equações lineares, $Ax = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix} x = b$$

pode, sob certas condições, ser resolvido pelo método iterativo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega a & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1 - \omega & \omega a \\ 0 & 1 - \omega \end{bmatrix} x^{(k)} + \omega b$$

- (a) Para que valores de a o método converge se $\omega = 1$? **Solução:** $a \in] -1, 1[$
 (b) se $a = -1/2$ e $\omega = 1/2$ o método converge? **Solução:** Sim.

6. Considere o sistema $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 8 \\ 2 & -7 & -10 \\ 10 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -23 \\ 34 \end{bmatrix}$$

- (a) É possível reordenar as linhas do sistema de modo que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel sejam convergentes? Justifique.
- (b) Considere o novo sistema (equivalente). Com $\mathbf{x}^{(0)} = [1 \ 1 \ 1]^T$ calcule quatro iteradas com ambos os métodos. Comente.

7. Considere o sistema linear da forma $Av = h$, com $h = [1 \ 2 \ 3]^T$ e

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Mostre que é possível transformar o sistema linear acima num equivalente, de modo a poder garantir que o método de Gauss-Seidel converge. Em seguida, efectue uma iteração do método de Gauss-Seidel, começando com iterada inicial $v^{(0)} = [2 \ 1 \ -2]^T$.

8. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ x_1 & + & x_2 & + & 10x_3 & = & 12 \\ 10x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 12 \end{cases}$$

- (a) Pretende-se aproximar a solução do sistema pelo método de Jacobi. Reordene as linhas de modo a que matriz do novo sistema tenha a diagonal estritamente dominante. Que conclui sobre a convergência do método de Jacobi?

Curiosidade. Determine as matrizes de iteração C_J e C_J^* associadas, respectivamente, ao sistema inicial e depois da reordenação e calcule os seus valores próprios.

Com o Mathematica obtém-se $\{11, (-11 + 9i\sqrt{3})/2, (-11 - 9i\sqrt{3})/2\}$ (para C_J) e $\{0.2, -0.1, -0.1\}$ (para C_J^*).

- (b) Aplique o método de Jacobi ao novo sistema e efectue 4 iterações. Calcule um majorante para o erro da 4 iterada numa norma adequada. Considere $\mathbf{x}^{(0)} = [-4, -4, -4]^T$.

Solução: As componentes de cada iterada são iguais entre si: $\mathbf{x}^{(1)} = [2, 2, 2]^T$, $\mathbf{x}^{(2)} = [4/5, ..]^T$, $\mathbf{x}^{(3)} = [26/25, ..]^T$, $\mathbf{x}^{(4)} = [124/125, ..]^T$; $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(4)}\|_\infty \leq 0.012$ (Pode usar outra norma?)

- (c) Aplique o método de Gauss-Seidel até que $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| < 10^{-2}$. Conclua sobre o erro da iterada $\mathbf{x}^{(k)}$.

9. Considere um sistema de duas equações na forma geral:

$$(I) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

onde $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, $a_{ii} \neq 0$.

- (a) Mostre que os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para qualquer aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ se e só se $|m| < 1$, onde $m = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$.
- (b) No caso do método de Jacobi, mostre que se a matriz do sistema tiver a diagonal estritamente dominante, por linhas, se verifica

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}\|_{\infty} \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_{\infty}$$

onde \mathbf{x} é a solução do sistema, $\mathbf{x}^{(k)}$ é a k -ésima iterada e $\alpha = \max\left(\frac{|a_{12}|}{|a_{11}|}, \frac{|a_{21}|}{|a_{22}|}\right)$.

- (c) Considere o sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Efectue a primeira iteração do método de Jacobi, partindo da aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [2, 1]^T$. Com base na alínea (b), determine um majorante do erro do resultado obtido.

- (d) Nas condições da alínea anterior, quantas iterações do método de Jacobi são necessárias para garantir que seja satisfeita a condição $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_{\infty} < 0.001$?

10. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ -x + y = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

- (a) Prove que o método de Jacobi converge para a solução exacta deste sistema, qualquer que seja a aproximação inicial. (Nota: poderá usar um programa para obtenção de raízes de polinómios, caso precise.)
- (b) Mostre que, no caso de se usar o método de Gauss-Seidel, não está garantida a convergência para qualquer aproximação inicial. Indique uma aproximação inicial $x^{(0)}$ (diferente da solução exacta), tal que a sucessão $\{x^{(k)}\}$ seja convergente; e uma aproximação inicial $\tilde{x}^{(0)}$, partindo da qual o método diverja.

11. Considere o sistema linear $Ax = b$, com $b = [2 \ 4 \ 15]^T$ e, sendo a número real,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & a & -1 \\ 0 & 2 & a + 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine um intervalo (ou união de intervalos) de valores que o parâmetro a pode tomar, de forma a garantir a convergência do método de Jacobi qualquer que seja a iterada inicial. Justifique todos os cálculos.
- (b) Com $a = 4$ e, partindo do vector inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [1 \ 2 \ 1]^T$, determine duas iteradas do método de Jacobi para aproximar \mathbf{x} .
- (c) Mostre que é válida a seguinte fórmula para os erros do método de Jacobi usando uma norma conveniente:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k+1)}\| \leq \beta \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|.$$

Justifique a norma escolhida e determine a constante β .

(d) Calcule um majorante para a norma $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(2)}\|$.

12. Seja o sistema linear $Ax = b$ onde $b = [2 \ 1 \ 2]^T$ e A tem a forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & a & 1 \\ 0 & b & a \end{bmatrix}.$$

Mostre que qualquer que seja $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, o método de Jacobi converge para a solução do sistema se e só se for satisfeita a condição $|a| > \sqrt{2|b|}$

13. Considere o seguinte sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verifique que este sistema pode ser resolvido por um processo iterativo da forma

$$x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + C$$

Identifique a matriz B e o vector C . Se $x^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T$ estime a norma do erro de $x^{(n)}$.

14. (Exame 11/01/2005) Considere o método iterativo

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + b, \quad k \in \mathbb{N}, \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^4,$$

onde

$$C := \begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 & -1/6 & 1/6 \\ 0 & 2/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 0 & -1/6 \end{bmatrix}$$

e $b := (1, 0, 1, 0)$.

(a) Mostre que qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^4$, este método iterativo converge para a solução do sistema linear $(I - C)x = b$.

(b) Considere $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)$ e efectue duas iteradas. Obtenha uma estimativa para o erro $\|x - x^{(2)}\|$.

15. Considere o sistema linear $Ax = b$ com

$$A := \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2\alpha \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b := (1, 0, 1).$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (a) Mostre que tanto o método iterativo de Jacobi como o de Gauss-Seidel convergem para a solução deste sistema, qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ se e só se $|\alpha| < 4/3$. Prove também que o método de Gauss-Seidel converge mais rapidamente, desde que $\alpha \neq 0$. Como é que os dois métodos convergem quando $\alpha = 0$?
- (b) Seja $\alpha = 1/2$ e $x^{(0)}$ o vector nulo. Calcule as três primeiras iteradas pelo método de Gauss-Seidel. Obtenha uma estimativa para o erro $\|x - x^3\|_\infty$.

II. 3 Métodos iterativos para sistemas não-Lineares

1. (EXAME 28.07.97) Pretende-se resolver pelo método de Newton o seguinte sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2(x_3 + 1) = 10 \\ 3(x_2 + 1) + x_3^2 = 11 \\ 3x_1 + x_3^2 = 9 \end{cases}$$

tomando como aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [3 \ 2 \ 1]^T$.

- (a) Mostre que o sistema linear $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b}$ a ser resolvido para se obter $\mathbf{x}^{(1)}$ é tal que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Obtenha ainda o vector \mathbf{b} .

- (b) Resolva o sistema linear obtido em **2.a)**, pelo método de eliminação de Gauss e obtenha $\mathbf{x}^{(1)}$.
2. (EXAME 09.07.92) Pretende-se resolver pelo método de Newton o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} e^x - 3 = 0 \\ 3y + 4z = 3 \\ 2x^2 + 2x + 2z = 1 \end{cases}$$

- (a) Tomando como aproximação inicial $[x_0, y_0, z_0]^T = [0, 1, 2]^T$, ao efectuar uma iteração pelo método de Newton, somos conduzidos a resolver um certo sistema de equações lineares. Qual?
- (b) Resolva o sistema de equações lineares obtido na alínea anterior, utilizando o método de Gauss-Seidel, considerando como aproximação inicial o vector nulo e efectuando duas iterações.
3. Considere o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\begin{cases} x^3 + 5y - 2z = 0 \\ e^y - z^2 = 1 \\ -x^2 + y + z = \mu, \end{cases}$$

onde μ é um número real conhecido, próximo de 0. Para aproximar uma solução deste sistema pretende-se utilizar o método de Newton. Tomando como aproximação inicial o vector $\mathbf{x}^{(0)} = (c, 0, 0)$, onde c é um certo número real, para obter a aproximação $\mathbf{x}^{(1)}$ somos levados a resolver um sistema linear com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3c^2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2c & 1 & 1. \end{bmatrix}$$

- (a) Mostre como se obteve esta matriz e calcule o segundo membro do sistema.

- (b) No caso de se aplicar o método de Jacobi para resolver o sistema linear, diga para que valores de c está garantida a condição necessária e suficiente de convergência do método.
- (c) No caso de $c = 1$, resolva o sistema pelo método de Jacobi e calcule $\mathbf{x}^{(1)}$ (primeira iterada do método de Newton).