Matemática Computacional
Ficha 3 (Capítulo 4)
Aproximações de funções
1s-2017/18, MEEC

I. Revisão da matéria/Formulário

• Interpolação Polinomial

Fórmula de Lagrange:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right) \qquad\qquad p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, l_i(x)$$

Fórmula de Newton com dif. divididas:

$$\begin{cases} f[x_j] = f(x_j), \quad j = 0, ..., n \\ f[x_j, ..., x_{j+k}] = \dfrac{f[x_{j+1}, ..., x_{j+k}] - f[x_j, ..., x_{j+k-1}]}{x_{j+k} - x_j}, \quad j = 0, ..., n-k, \quad k = 1, ..., n \end{cases}$$

$$p_n(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, ..., x_i](x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})$$

Fórmula de erro: $e_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \displaystyle\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$

• Mínimos Quadrados

$$\begin{bmatrix} (\phi_0, \phi_0) & \dots & (\phi_0, \phi_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\phi_m, \phi_0) & \dots & (\phi_m, \phi_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\phi_0, f) \\ \dots \\ (\phi_m, f) \end{bmatrix}$$

$$(\phi_i, \phi_j) = \sum_{k=0}^{n} \phi_i(x_k)\phi_j(x_k), \quad (\phi_i, f) = \sum_{k=0}^{n} \phi_i(x_k) f_k$$

II. Exercícios

II. 1 Interpolação polinomial

1. Numa experiência de laboratório um aluno foi encarregue de medir a corrente eléctrica, I, dum dado circuito eléctrico. Fez apenas três medições, tendo obtido os seguintes valores

t	0	1	2	(s)
I(t)	2	1.8	1.5	(A)

   (a) Determine duas expressões para o polinómio $p(x)$ de grau ≤ 2 que interpola I nos pontos da tabela, utilizando a fórmula de Lagrange e de Newton.

   (b) Usando o polinómio interpolador de I nos pontos tabelados, qual seria o valor aproximado da corrente do circuito no instante 1.5 que este aluno poderia dar? Qual o erro cometido sabendo que $|I^{(3}(t)| \leq 0.1$ qualquer que seja $t > 0$.

   (c) Sabendo que um colega tinha medido um valor de 1.1 (A) para a corrente no instante 1.25, dê uma nova estimativa da corrente do circuito no instante 1.5, usando interpolação polinomial. Qual o erro cometido sabendo que $|I^{(4}(t)| \leq 0.2$ qualquer que seja $t > 0$.

   (d) Sabendo que I é um polinómio de grau quatro da forma

$$I(t) := t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d,$$

   determine uma expressão para I a partir do polinómio obtido na alínea anterior.

2. Na tabela seguinte são apresentados valores (considerados exactos) da função

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

x	0.8	1.0	1.6
$f(x)$	1.890	2.000	3.185

   (a) Obtenha a expressão do polinómio interpolador de f nos três pontos tabelados, através da fórmula de Lagrange.

   (b) Idem, mas através da fórmula de Newton.
   Solução a), b): $p_2(x) = 1.89 + 0.55(x - 0.8) + 1.78125(x - 0.8)(x - 1)$.

   (c) Calcule o valor interpolado para $x = 1.3$. Obtenha um majorante do erro a partir da expressão do erro de interpolação e compare-o com o erro efectivamente cometido.
   Solução: $p_2(1.3) = 2.4321875$; majorante para erro: $|e(1.3)| \leq 0.11$; valor exacto do erro absoluto é $|f(1.3) - p_2(1.3)| \simeq 0.027$, ou seja, cerca de 4 vezes inferior ao majorante; isso resulta de na majoração se usar $max|f'''(x)|, x \in [0.8, 1.6]$ no lugar de $|f'''(\xi)|$

3. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	3	4	2

(a) Determine duas expressões para o polinómio $p(x)$ de grau ≤ 2 que interpola f nos pontos $0,\ 2,\ 4$ da tabela, utilizando as fórmulas de Lagrange e de Newton.

(b) Supondo que $f(x) = exp(-x) + a_2x^2 + a_1x + a_0$, determine um majorante para o erro de interpolação $|f(1.5) - p(1.5)|$, onde p é o polinómio da alínea anterior (sem obter as constantes a_i).

Solução: Usando $\max_{[0,4]} |f^{(j)}(x)| = \max_{[0,4]} exp(-x) = exp(0) = 1$ na fórmula do erro de interpolação, vem $|f(1.5) - p_2(1.5)| \leq (1/6)|(1.5-0)(1.5-2)(1.5-4)| = 0.3125$

(c) Sabendo que $f[2, 3, 4] = 1$ e tendo em conta a alínea a) apenas, obtenha o polinómio p_3 que interpola f nos pontos $0, 2, 3, 4$, à custa do polinómio p já obtido.

Solução: Junte o ponto $z_3 = 3$ à tabela obtida. Obtenha $f[0, 2, 4, 3] = 13/24$. Calcule-a a partir de 2 diferenças de ordem 2, de forma a usar $f[2, 3, 4] = 1$; tenha em conta que nas diferenças divididas não interessa a ordem dos pontos.

4. Pretende-se construir uma tabela de valores da função e^x, para $x \in [0, 1]$, com pontos igualmente espaçados $x_j = jh, \quad j = 0, 1, ...N$, onde h é o espaçamento entre os pontos. Em cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ a função é aproximada pelo polinómio interpolador de grau menor ou igual a 1 nos pontos x_j, x_{j+1}. Determine o valor máximo do espaçamento h para que o erro de interpolação em qualquer ponto do intervalo $[0, 1]$ seja inferior a 10^{-6}.

5. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
f_i	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

(a) Obter $f(0.47)$ usando um polinómio de grau 2.

(b) Admitindo que $f \in C^3([0, 1])$e que $\max_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)| = M$, calcule um majorante do erro do resultado obtido na alínea anterior, em função de M.

6. (Exame 18.01.93) Sejam $l_0(x)$, $l_1(x)$,..., $l_n(x)$ os polinómios de Lagrange de grau n associados aos nós x_0, x_1,..., x_n

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Considere a função

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) - 1$$

Prove que

(a) g é um polinómio de grau $\leq n$.

(b) $g(x_i) = 0$, $i = 0, 1, ..., n$. *Atenda às propriedades dos* $l_j(x)$

(c) $g(x) = 0$, para todo o x.

7. (Exame 19/01/04) Considere a seguinte tabela de valores de uma função

x	-1	0	1	2
f(x)	1	0	1	16

(a) Determine o polinómio interpolador de f, P_3, nos pontos da tabela pela fórmula interpoladora de Newton.

(b) Mostre que

$$\max_{x\in[-1,2]} |x(x-2)(x^2-1)| = 1.$$

(c) Sabendo que $|f^{(4}(x)| \leq 24$, para todo $x \in [-1,2]$, obtenha um majorante para o erro

$$e_3(x) = f(x) - P_3(x),$$

válido para todos os valores de $x \in [-1,2]$.

8. Considere a tabela de valores

x	-1	1	4
f(x)	2	-2	-8

Sabendo que f é um polinómio e que

$$f[-1,1,2] = 4, \quad f[-1,1,2,4,x] = 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}/\{-1,1,,4\}$$

determine a forma de f.

9. Seja $f \in C^3[a,b]$ e p_2 o polinómio de grau menor ou igual a dois que interpola f nos pontos $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ e $x_2 = b$. Mostre que

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{(b-a)^3}{72\sqrt{3}} \max_{y\in[a,b]} |f^{(3}(y)|$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

10. Considere a seguinte tabela de valores de uma função

x	-1	0	1	2
f(x)	1	1	1	2

(a) Usando a fórmula de Newton com diferenças divididas, construa o polinómio interpolador de f de grau menor ou igual a três.

(b) Sabendo que $f^{3)}(x) = 4x - 1$, utilize a alínea anterior para determinar a expressão exacta de f.

11. Considere a seguinte tabela de valores:

x_i	-3	-1	1	3
f_i	-33	14	-2	-5

(a) Sabendo que a função tabelada é contínua e estritamente monótona em $[-1,3]$, determine por **interpolação inversa** o zero da função situado no intervalo $[-1,1]$, utilizando o maior número possível de pontos. Justifique a escolha dos nós de interpolação.

Solução: pretende-se o valor z tal que $f(z)=0$, ou seja, pretende-se uma aproximação para $z = f^{-1}(0)$. Note que z deve estar entre -1 e 1. Seja $g(y) = f^{-1}(y)$. Faça uma tabela para a função g, "invertendo" a tabela dada. Determine um polinómio interpolador P_2 de g escolhendo convenientemente os pontos, tendo em conta que f é estritamente monótona em [-1, 3]. A designação de **interpolação inversa** tem a ver com o interpolar uma tabela "invertida".
Vem $P_2(y) = -1-0.125(y-14)+0.02851(y-14)(y+2)$. No final vai obter $z \simeq P_2(0) = -0.0482464$.

(b) Outra maneira de aproximar o zero, z, de f é obter o polinómio interpolador de f, p_2, nos três últimos pontos, e usar o zero de p_2 no intervalo $[-1,1]$. Determine esse zero e compare com o resultado obtido por interpolação inversa. Tente dar uma justificação.

Solução: O referido zero é 0.62664. Este valor é obviamente diferente do obtido por interpolação inversa, ou seja -0.0482464. Note-se que, mesmo quando a inversa $g(y) = f^{-1}(y)$ existe, o polinómio interpolador de g <u>não</u> é em geral o inverso do polinómio interpolador de f.

(c) Supondo que, para $x \geq -1$, a função é da forma

$$f(x) = 3x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

e que $f[-1,1,2] = 4$, escreva, recorrendo ao polinómio interpolador calculado na alínea anterior, uma expressão que permita obter $f(x)$.

Solução: Tem-se (é preciso justificar) $f(x) = p_3(x) + 3(x+1)(x-1)(x-3)(x-2); p_3(x) = p_2(x) - (19/8)\,(x+1)(x-1)(x-3)$

II. 2 Mínimos quadrados (ajustamentos lineares)

1. Os gastos diários com o consumo de electricidade de uma empresa dependem da temperatura ambiente. A tabela seguinte apresenta o valor desses gastos (em euros) em função da temperatura (°C) exterior

temperatura (t_i)	2	5	10	15	20	30
gastos (g_i)	3	1.5	1	0.5	0.25	2

Obtenha a função do tipo

$$h(x) = a + bx$$

que melhor aproxima f no sentido dos mínimos quadrados. Dê um valor aproximado do gasto desta empresa num dia em que estejam 7 °C no exterior (idem com 25°C). Determine

$$Q = \sum_{i=0}^{5}(g_i - h(t_i))^2.$$

E se ajustasse estes dados com uma função do tipo $h(x) = a + bx + cx^2$? Compare os resultados. Comente.

2. Considere a seguinte tabela:

x_i	1.0	1.2	1.5	1.6
f_i	5.44	6.64	8.96	9.91

   (a) Obtenha o polinómio do 1^o grau que se ajusta (no sentido dos mínimos quadrados) aos pontos tabelados.
   Solução: $p_1(x) = -2.135933 + 7.451647x$

   (b) Idem, mas para o polinómio do 2^o grau. Utilizando o polinómio obtido, determine uma estimativa do valor de $f(1.4)$.
   Solução: $p_2(x) = 3.966473 - 2.244618x + 3.721460x^2$
   $f(1.4) \simeq 8.1180694$.

   (c) Relativamente aos dois casos anteriores, calcule o valor das somas dos quadrados dos desvios correspondentes aos ajustamentos efectuados.
   Solução: grau 1: D= 0.06485; grau 2: D=0.00306
   Qual seria o valor dessa soma, no caso de se fazer o ajustamento por um polinómio do 3^o grau?

3. Seja f uma função tal que $f(-2) = 3$, $f(0) = 6$ e $f(2) = 15$. Obtenha a função do tipo $g(x) = ax + b$ que melhor se ajusta aos valores dados, no sentido dos mínimos quadrados. Mostre ainda que:

$$\sum_{i=1}^{3}(f(x_i) - \alpha x_i - \beta)^2 \geq 6$$

para quaisquer α, β valores reais.

4. (Exame LEIC 13/02/2003) Considere a seguinte tabela de valores de uma função

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
f(x)	1	0.5	-1	0

Obtenha a função do tipo

$$g(x) = a + b\sin(x) + c\cos(x)$$

que melhor aproxima f no sentido dos mínimos quadrados e determine

$$Q = \sum_{j=0}^{3}(f(x_j) - g(x_j))^2.$$

Seja

$$Q_1 = \sum_{j=0}^{3}(f(x_j) - d\cos(x_j))^2.$$

Justifique que para todo $d \in \mathbb{R}$

$$Q_1 > 0.0625,$$

5. Considere a seguinte tabela de valores de uma função

x	0	0.5	1
f(x)	5	5.2	6.5

Obtenha a função da forma

$$g(x) = ae^{x} + be^{-x}$$

que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados aos pontos tabelados. Calcule o valor da soma dos desvios quadrados correspondentes ao ajustamento efectuado.

II. 2 Mínimos quadrados (ajustamentos não lineares)

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função

x	-1	0	1	2
f(x)	6	3	2	1

Obtenha a função do tipo

$$g(x) = \frac{1}{a + bx}$$

que melhor aproxima f no sentido dos mínimos quadrados e determine

$$Q = \sum_{j=0}^{3} (f(x_j) - g(x_j))^2.$$

Sugestão: efectue uma mudança de variáveis.

2. Considere a seguinte tabela de valores de uma função

x	-1	-0.5	0	1
f(x)	0.262087	1.20472	1.34375	0.0130539

Calcule (com o auxilio do Mathematica) os valores das constantes a, b que minimizam o funcional

$$\sum_{j=0}^{4} (f_j - ae^{b{x_j}^2}).$$

Sugestão: Utilize o método de Newton para sistemas lineares. Poderia converter num problema de ajustamento linear? Ajudaria?