**Matemática Computacional**
**Ficha 5 (Capítulo 5)**
**Integração numérica**
**1s-2017/18, MEEC**

## I. Revisão da matéria/Formulário

- **Regra dos trapézios**:

$$T(f) = T(f) = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

$$T_N(f) = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_N) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right]$$

$$E_N^T(f) = -\frac{(b-a)\,h^2}{12} f''(\xi), \quad \xi \in (a,b)$$

- **Regra de Simpson:**

$$S(f) = S(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right],$$

$$S_N(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_N) + 4\sum_{i=1}^{N/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{N/2-1} f(x_{2i})\right]$$

$$E_N^S(f) = -\frac{(b-a)\,h^4}{180} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a,b)$$

## II. Exercícios

1. A massa que entra ou sai de um reactor pode determinar-se pelo integral

$$M = \int_{t_1}^{t_2} Qc\, dt,$$

onde $t_1$ e $t_2$ são os instantes inicial e final, respectivamente, $Q$ representa o fluxo por unidade de tempo e $c$ a concentração de massa.

Um aluno mediu a concentração do reactor em vários instantes de tempo, obtendo

| t $min$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 12 | 16 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| c $mg/m^3$ | 10 | 20 | 30 | 40 | 60 | 72 | 70 | 50 |

Para um fluxo constante $Q = 12$, estime a massa que sai do reactor entre $t = 0$ e $t = 20$ $min$ usando várias formas de integração. Comente.

2. Considere o integral

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

(a) Determine o seu valor aproximado, considerando quatro subintervalos e utilizando:

i. A regra dos trapézios. *Sol.* $I \simeq 0.742984$

ii. A regra de Simpson. *Sol.* $I \simeq 0.746855$

(b) Faça uma estimativa do número mínimo de subintervalos que se deveria considerar, se se pretendesse calcular o integral da alínea anterior com um erro inferior a $10^{-4}$, utilizando

i. A regra dos trapézios.
*Res.* Use a maj. $max|f''| = |f''(0)| = 2$; obtém-se $N \geq 41$

ii. A regra de Simpson.
*Res.* Sendo $f^{(IV)}(x) = 4\, e^{-x^2}\,(4x^4 - 12x^2 + 3)$, majorando cada factor, tém-se

$$|f^{(IV)}(x)| \leq (4)(5) = 20, \;\; x \in [0, 1]$$

Substituíndo na fórmula, obtém-se $N \geq 6$ (N par)

3. Para medir o ritmo cardíaco do coração costuma-se usar o método de diluição: Injecta-se corante no atrium direito do coração, e com ajuda duma proveta inserida na aorta mede-se a concentração de corante que sai do coração em instantes igualmente espaÃ§ados dum intervalo de tempo $[0, T]$ até o corante desaparecer. Seja $c(t)$ a concentração de corante num instante $t$. Pode-se ver que o fluxo de sangue bombeado pelo coração em $[0, T]$ é dado por

$$F = \frac{A}{\int_0^T c(t)\, dt},$$

onde $A$ é a quantidade de corante injectado.

Suponhamos que injectamos 5-mg de corante e que a concentração deste (em miligramas por litro) é medido na aorta em intervalos de longitude um segundo conforme se mostra na seguinte tabela:

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| c(t) | 0 | 0.4 | 2.8 | 6.5 | 9.8 | 8.9 | 6.1 | 4 | 2.3 | 1.1 | 0 |

Estime o volume de sangue bombeado pelo coração em $[0, 10]$ usando as regras do Trapézios e Simpson.

4. Considere a região $S$ do plano, situada no primeiro quadrante, delimitada pelas rectas $x = 1/2$ e $x = 1$, e pelas curvas de equações $y = x^3$ e $y^2 = x$.

   (a) Estabeleça o integral definido que lhe permite calcular a área de $S$, denotada por $A(S)$.

   (b) Determine uma aproximação de $A(S)$ pela regra de Simpson composta de modo a garantir um erro inferior a $3 \times 10^{-3}$.

5. O coeficiente de inteligência (Q.I) é medido através de uma distribuição normal com média 100 e desvio 15. A percentagem da população que tem um Q.I entre 85 e 115 é dado pela fórmula

$$100\left(\int_{85}^{115} e^{-(x-100)^2/(2\cdot 15^2)}\,dx\right)\%.$$

   Obtenha uma aproximação desta percentagem pela regra de Simpson.

6. Suponha que a função $f$ está definida no intervalo $[0, 3]$ do seguinte modo:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 3x - 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

   a) Obtenha aproximações para o integral $\int_0^3 f(x)dx$ dos seguintes modos:

   i) Utilizando a regra dos trapézios composta no intervalo $[0, 3]$ com passo $h = 1$.

   ii) Utilizando a regra de Simpson no intervalo $[0, 3]$ e apenas três pontos.

   b) Compare e comente os valores obtidos com o valor exacto do integral.

7. A tabela seguinte mostra os resultados obtidos por uma regra de Newton-Cotes composta (Trapézios ou Simpson) no cálculo do integral $I(f)$ de uma certa funÃ§ção $f$ indefinidamente diferenciável.

| n | 8 | 16 | 32 | 64 |
|---|---|---|---|---|
| $I_n$ | 295.27 | 274.15 | 268.97 | 267.68 |

   O valor $I_n$ representa a aproximação obtida com $n + 1$ nós de integração. Sabendo que o valor exacto do integral é $I(f) = 267.25$, diga, justificando, que fórmula poderá ter sido usada.

8. Para aproximar o integral

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, dx$$

considere a fórmula de quadratura

$$Q(f) = A_0 f(2-\sqrt{2}) + A_1 f(2+\sqrt{2}).$$

Determine os pesos $A_0$ e $A_1$ de tal modo que a fórmula seja pelo menos de grau um. Mostre que a fórmula obtida é de grau três.

9. Encontre uma fórmula de quadratura

$$Q(f) = 2f(a) + Af(b)$$

que seja exacta para os polinómios de grau dois no intervalo $[0,1]$.

- Aproxime $\int_0^1 x^4 \sqrt{1-x/2}\, dx$.
- Indique como construir uma fórmula composta, partindo da expressão obtida anteriormente. Aplique esta fórmula ao integral anterior considerando seis sub-intervalos igualmente espaçados.

10. Seja $f \in C[a,b]$, com $f^{'}$ integrável em $[a,b]$.

- Prove a seguinte estimativa do erro para a regra dos trapézios composta

$$E_n^T(f) = \sum_{j=1}^{n} \big[\frac{x_{j-1}+x_j}{2} - x\big] f^{'}(x)\, dx,$$

onde $x_j = a + jh$, $j = 0, ..., n$, $h = b - a/n$.

- Calcule um valor aproximado do integral

$$I(f) = \int_0^1 e^{\sqrt{x}}\, dx,$$

pela regra dos trapézios composta com $h = 1/6$. Estime o erro.

11. Encontre uma fórmula para calcular

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos x\, dx$$

que seja exacta quando $f$ é um polinómio de grau menor ou igual a 3 e que utilize os pontos $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$.

12. Considere o integral

$$\int_0^1 \sqrt{x}(1+e^{-x})\, dx$$

(a) Verifique que as derivadas de primeira e segunda ordem da função integranda não estão definidas no ponto 0.

(b) Efectue a mudança de variáveis $x = t^2$ e verifique que a função integranda do integral obtido tem derivadas até à segunda ordem contínuas no intervalo de integração.

(c) Construa uma tabela com as aproximações do integral obtidas pela regra do trapézio composta com $5, 8, 10, 20$ subintervalos.

13. Considere o integral

$$\int_{0.2}^{1} \frac{1}{x}\, dx$$

(a) Determine uma aproximação para o valor do integral utilizando a regra de Simpson composta com 8 subintervalos.

(b) Escreva

$$\int_{0.2}^{1} \frac{1}{x} dx = \int_{0.2}^{0.3} \frac{1}{x} dx + \int_{0.3}^{0.4} \frac{1}{x} dx + \int_{0.4}^{0.6} \frac{1}{x} dx + \int_{0.6}^{1} \frac{1}{x} dx$$

e calcule uma aproximação do integral dado aplicando a regra de Simpson simples a cada um dos integrais do segundo membro.

(c) Compare os resultados obtidos com a solução exacta (que é igual a $-log\, 0.2 = 1.6094379...$).

14. (lista incompleta)