Matemática Computacional
Ficha 6 (Capítulo 6)
Integração numérica
1s-2017/18, MEEC

I. Revisão da matéria/Formulário

Métodos numéricos para equações diferenciais

- Método de Euler (explícito):

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$

$$|y(t_i) - y_i| \leq \frac{hM}{2L}\left[e^{L(t_i - t_0)} - 1\right], \qquad |y''(t)| \leq M,\, t \in [t_0, t_i]$$

- Métodos de Runge-Kutta de ordem 2 (o ponto médio):

$$y_{i+1} = y_i + \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) hf(t_i, y_i) + \frac{1}{2\alpha} hf(t_i + \alpha h, y_i + \alpha h f(t_i, y_i))$$

$\alpha = \frac{1}{2}$: Método do ponto médio (Método de Euler modificado)

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n))$$

$\alpha = 1$: Método de Heun:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))$$

II. Exercícios

1. Considere o problema de Cauchy

$$y'(x) = 1 - x + 4\,y(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$
$$y(0) = 1$$

que tem solução exacta $y(x) = \frac{x}{4} - \frac{3}{16} + \frac{19}{16}e^{4x}$.

   (a) Obtenha um valor aproximado para $y(0.2)$ usando o método de Euler com passo $h = 0.1$.

   (b) Recorrendo a um resultado teórico deduza um majorante para o erro cometido. Compare com o valor do erro cometido exacto.

   (c) Obtenha uma aproximação de $y(0.2)$ usando os métodos do ponto médio e Heun com $h = 0.1$. Compare com o resultado obtido nas alínea a) e c). Comente.

2. A taxa de crescimento do número de bactérias numa certa amostra é modelado pela equação

$$\frac{dy}{dt} = 1.2y\big(1 - \frac{y}{4200}\big).$$

Sabendo que num instante inicial $t = 0$ havia 1200 bactérias na amostra, dê uma estimativa do número de bactérias quando t=5,10,15 pelo método de Euler.

3. Utilize o método de ponto médio para obter uma aproximação da solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = x + y(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

no ponto $x = 0.1$ com espaçamentos $h = 0.1, 0.05, 0.025$. Sabendo que a solução exacta deste problema é dada por $y(x) = \exp(x) - 1 - x$, compare os resultados obtidos com o valor exacto de $y(0.1)$. Comente.

4. A água do mar contém 0.03 Kg. de sal por cada litro de água. Num tanque com 5000 L. de água encontram-se dissolvidos 20 Kg. de sal. Neste tanque mete-se água do mar a uma velocidade de 25 L/ min, mistura-se bem e faz-se sair à mesma velocidade. Seja $y(t)$ a quantidade de sal (em kilogramas) que permanece no tanque após o instante t. Pode-se ver que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{150 - y(t)}{200}.$$

Use o método do ponto médio para aproximar a quantidade de sal que permanece no tanque após 5, 10 e 15 min.

5. Verifique que o método do ponto médio quando aplicado ao problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = -20y(x), & 0 \leq x \leq 20, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

tem por expressão geral:

$$y_{n+1} = (1 - 20h + 200h^2)^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

(a) Aplique este método para obter uma solução aproximada de $y(10)$ e compare o resultado com o valor exacto, sabendo que a soluçao do problema anterior é $y(x) = \exp(-20x)$.

(b) Se n for muito grande, o que acontece com a solução obtida por este método de Runge Kutta?

6. Os métodos para resolver problemas de Cauchy para equações diferenciais podem também ser usados para calcular integrais. Podemos por exemplo calcular $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ resolvendo o problema:

$$\begin{array}{l} x'(t) = e^{-t^2}, \quad 0 \le t \le 1 \\ x(0) = 0 \end{array}$$

Utilize o método de Euler com passo $h = 0.25$ e indique uma estimativa do erro para o valor aproximado de $x(1)$ que obteve.

7. Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - \dfrac{y(x)}{x}, \quad 2 \le x \le 3, \\ y(2) = 2 \end{cases}$$

determine um valor aproximado de $y(2.1)$ pelo método de Euler com $h = 0.1, 0.05, 0.025$. Compare com os valores obtidos pelo método de Heun.

8. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{array}{l} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^x, \quad 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1 \end{array}$$

Obtenha valores aproximados para $y(0.3)$ e $y'(0.3)$ pelo método de Euler com passo $h = 0.1$.

9. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = -2y_1 + 5e^{-x}, \qquad 0 \le x \le 1 \\ \frac{dy_2}{dx} = -\frac{y_1 {y_2}^2}{2} \\ y_1(0) = 2,\ y_2(0) = 4. \end{array}$$

(a) Obtenha valores aproximados para $y_1(0.1)$ e $y_2(0.1)$ pelo método de Euler com passo $h = 0.05$.