Cálculo Diferencial e Integral III
Notas Sobre as Aulas Teóricas

João Teixeira, Maria João Borges

1º Semestre de 2021/22

Índice

Capítulo 1

Equações Diferenciais Ordinárias

1.1 Introdução

1.1.1 Notação e Definições

Designa-se por *equação diferencial* uma relação de igualdade entre termos envolvendo uma função $y(x)$, as suas derivadas e a variável independente x. A equação poderá também depender de parâmetros não directamente relacionados com a variável independente x. É talvez mais simples pensar numa equação diferencial como uma equação cuja incógnita pertence a um *espaço de funções*

$$\mathbb{R}^n \supset D \ni x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \longmapsto y(x) = \Big(y_1(x), \ldots, y_m(x)\Big) \in \mathbb{R}^m$$

(pode-se ter $\mathbb{C}$ em vez de $\mathbb{R}$). Desta forma, $x_1, \ldots x_n$ são as variáveis independentes (e a dimensão do domínio de y, $n \in \mathbb{N}$, o seu número) e $y_1, \ldots, y_m$ as variáveis dependentes (e a dimensão do contradomínio de y, $m \in \mathbb{N}$, o seu número). Note que os (eventuais) parâmetros não são contados como variáveis independentes ou dependentes da equação.

As equações diferenciais dizem-se *ordinárias* se o domínio da função $y(x)$ está contido em $\mathbb{R}$, caso em que as derivadas que nela surgem são totais (em ordem a $x \in \mathbb{R}$). Dizem-se *parciais* se têm mais do que uma variável independente (o domínio de $y(x)$ está contido em $\mathbb{R}^n$) e envolvem derivadas parciais de y (em ordem a $x_1, x_2, \ldots$).

As equações diferenciais classificam-se como *escalares* ou *vectoriais* consoante tenham uma ou mais do que uma variável dependente (ou seja, o contradomínio de $y(x)$ está contido em $\mathbb{R}$ no caso escalar e $\mathbb{R}^m$ no caso vectorial). Neste último caso é costume considerar que a variável dependente é o vector $y(x) = \big(y_1(x), \ldots y_m(x)\big) \in \mathbb{R}^m$.

Por exemplo, a equação

$$\frac{dy}{dx} + 2ayx = 0$$

é ordinária, x é a variável independente e $y = y(x)$ a variável dependente, enquanto a é um parâmetro. Já a 2ª Lei de Newton para o movimento de uma partícula em $\mathbb{R}^3$

$$F(t, \mathbf{r}) = m\ddot{\mathbf{r}}, \tag{1.1}$$

é uma equação ordinária vectorial, pois $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Aqui utilizou-se a notação de Newton

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

para representar as 1ª e 2ª derivadas em ordem a t. A massa da partícula, m, é apenas um parâmetro.

Como exemplos de equações diferencias parciais escalares, podemos indicar a *equação de Laplace* num domínio bidimensional,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

(já introduzida na Análise Complexa), onde $u : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; a *equação do calor* unidimensional,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

onde $u : \mathbb{R} \times [0, L] \to \mathbb{R}$; a *equação das ondas* unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

onde $u : \mathbb{R} \times [0, L] \to \mathbb{R}$. Também poderemos ter versões tridimensionais destas equações como, por exemplo, a equação do calor no espaço:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \overset{\text{def}}{=} k \, \nabla^2 u$$

onde $u = u(t, x, y, z)$, com $t \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$ e ∇^2 é o *operador laplaciano*.

Alguns problemas de equações diferencias parciais são de estudo muito difícil. Um dos mais conhecidos exemplos consiste nas equações de Navier-Stokes

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla) u = \nu \nabla^2 u + f(t, x)$$

$$\operatorname{div} u = 0$$

onde $u = u(t, x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$, com $t \in \mathbb{R}$, $(x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$. As suas soluções descrevem o campo de velocidade, u, de um fluído incompressível de viscosidade ν que ocupa o domínio D e está sujeito a uma força exterior f. Trata-se, pois, de uma equação diferencial parcial vectorial, que é bem conhecida pelas suas aplicações à hidrodinâmica e aerodinâmica. Para uma descrição de um problema em aberto relacionado com estas equações ver

`http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations`

Dedicaremos o que resta deste capítulo ao estudo das equações diferenciais ordinárias.

1.1.2 Ordem e Soluções de uma Equação Diferencial Ordinária

Uma equação diferencial (ordinária ou parcial) diz-se de ordem n se a maior ordem das derivadas das suas variáveis dependentes $y_1, \cdots y_m$ é n. Representamos o espaço vectorial das funções contínuas $y : I \to \mathbb{R}^m$ (com I um intervalo aberto) por $C(I, \mathbb{R}^m)$, que abreviaremos para $C(I)$. O espaço vectorial das funções contínuas e com derivadas contínuas até à ordem n será representado por $C^n(I, \mathbb{R}^m)$ ou, abreviadamente, $C^n(I)$. Assim:

$$C^n(I) = \left\{ y \in C(I) : y', y'', \cdots y^{(n)} \in C(I) \right\}$$

Uma função f é de classe C^n em I se e só se $f \in C^n(I)$.

Diz-se que uma função $y \in C^n(I)$, onde I é um intervalo aberto, é uma solução da equação diferencial (em I) se satisfaz a equação para qualquer $t \in I$, ou seja, se substituindo $y_1(t) \cdots y_n(t)$ na equação diferencial se obtém uma identidade, qualquer que seja $t \in I$.

Consideraremos equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem (escalares ou vectoriais) que podem ser explicitadas na forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),$$

onde $f : I \times D$, e onde D é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Uma solução da equação (1) é uma função $y \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ tal que $y(t) \in D$ e $y'(t) = f(t, y(t))$ para qualquer $t \in I$.

Como veremos posteriormente, o estudo de alguns tipos de equações ordinárias de ordem n (escalares ou vectoriais) pode ser reduzido ao das equações vectoriais de 1ª ordem. Por exemplo, na 2ª Lei de Newton (1.1), introduzindo como variável dependente a *quantidade de movimento*, $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$, obtém-se a equação vectorial de 1ª ordem:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} &= \dfrac{1}{m}\mathbf{p} \\ \\ \dot{\mathbf{p}} &= F(t, \mathbf{r}) \end{cases}$$

1.1.3 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Como exemplo, escrevemos a mais simples equação diferencial de 1ª ordem, no caso escalar:

$$y' = g(t).$$

A solução geral desta equação, que se obtém por primitivação, é

$$y(t) = \int g(t)dt + C,$$

estando bem definida em qualquer intervalo onde g é contínua. Note-se que existe uma infinidade de soluções para a equação diferencial; o mesmo se passa com qualquer equação diferencial ordinária de 1ª ordem, $y' = f(t, y)$, desde que f seja uma função contínua num conjunto aberto.

Acrescentando à equação de 1ª ordem uma *condição inicial*, obtém-se um *problema de valor inicial* (ou *problema de Cauchy*):

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Em certas condições (veremos isso mais tarde) um problema de valor inicial tem solução única.

O *intervalo máximo de solução*, I_{max}, do problema de valor inicial é o "maior intervalo" onde o problema (1.52) tem solução. Mais exactamente, I_{max} é o intervalo maximal de existência de solução [1].

[1] O intervalo I_{max} diz-se maximal no sentido em que existe uma solução de (1.52) em I_{max} e qualquer outro intervalo onde uma solução de (1.52) está definida está contido em I_{max}

1.2 Equações Escalares de Primeira Ordem

1.2.1 Determinação da Solução Geral

Muitos métodos de determinação da solução geral de equações diferenciais escalares de 1ª ordem baseiam-se na redução da equação a uma igualdade do tipo

$$\frac{d}{dt}\Big(G\big(t,y(t)\big)\Big) = g(t), \tag{1.3}$$

onde $G = G(t,y)$, $g = g(t)$ e a derivada no 1º membro da equação é uma derivada total em ordem a t. Por primitivação, a solução geral de (1.3), escrita na forma implícita, é:

$$G(t,y(t)) = \int g(t)dt + C$$

1.2.2 Equações Lineares

Uma equação escalar de primeira ordem diz-se *linear*, se pode ser escrita na forma

$$\dot{y} + a(t)y = b(t) \tag{1.4}$$

A equação diz-se homogénea se $b(t) \equiv 0$. Nesse caso, ela é equivalente a

$$\frac{y'}{y} = -a(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\Big(\log|y|\Big) = -a(t)$$

Primitivando, obtém-se:

$$\begin{aligned}\log|y| = -\int a(t)dt + C \quad &\Leftrightarrow \quad |y| = e^C \exp\left(-\int a(t)dt\right)\\ &\Leftrightarrow \quad y(t) = \pm D \exp\left(-\int a(t)dt\right)\end{aligned}$$

onde $D = e^C > 0$. Fazendo $K = \pm D$ e notando que $y(t) \equiv 0$ também é solução, obtemos a solução geral da equação linear homogénea

$$y(t) = K \exp\left(-\int a(t)dt\right), \qquad t \in I$$

como nas hipótese do Teorema. Então, existem r_1, r_2 reais posit onde I é qualquer intervalo aberto onde $a(t)$ é contínua e $K \in \mathbb{R}$.

Resolvamos agora a equação não homogénea. Multiplicando a equação (1.4) por uma função $\mu(t)$ tal que $\dot{\mu} = a(t)\mu$, por exemplo, tomando

$$\mu(t) = \exp\left(\int a(t)dt\right)$$

obtém-se a equação equivalente [2]:

$$\mu(t)\dot{y} + \mu(t)a(t)y = \mu(t)b(t) \quad \Leftrightarrow \quad \mu\dot{y} + \dot{\mu}y = \mu(t)b(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big(\mu y\Big) = \mu(t)b(t)$$

[2] As equações são equivalentes pois $\mu(t) = e^{\int a(t)dt} \neq 0$, para qualquer t

Assim, a solução geral de (1.4) é dada pela expressão:

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\Big[\int \mu(t)b(t)dt + C\Big]$$

Teorema: (Existência de solução de um PVI com equação linear)
Seja $I \subset \mathbb{R}$, a e b funções contínuas em I e $t_0 \in I$. Então, para qualquer $y_0 \in \mathbb{R}$, o PVI

$$\begin{cases} \dot{y} + a(t)y = b(t) \\ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admite solução única

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\Big[\int_{t_0}^{t} \mu(s)b(s)\,ds + \mu(t_0)y_0\Big]$$

como nas hipótese do Teorema. Então, existem r_1, r_2 reais positu(s) b(s)ds definida para todo $t \in I$.

Exemplo

(1) Determinar a solução do seguinte problema de valor inicial, indicando o intervalo máximo de existência de solução:

$$\begin{cases} \dot{w} + w = e^{-2t} \\ w(0) = 3 \end{cases}$$

A equação $\dot{w} + w = e^{-2t}$ é linear, com $a(t) \equiv 1$ e $b(t) = e^{-2t}$ obviamente contínuas em $\mathbb{R}$. Um factor integrante (em $I = \mathbb{R}$) para a equação é:

$$\mu(t) = e^{\int 1dt} = e^t$$

Sendo assim

$$\dot{w} + w = e^{-2t} \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dt}\Big(e^t w\Big) = e^{-t} \;\Leftrightarrow\; w(t) = e^{-t}(-e^{-t} + C)\ ,\ C \in \mathbb{R}$$

Dado que $w(0) = 3$ conclui-se que $C = 4$ e a solução do PVI é

$$w(t) = e^{-t}(-e^{-t} + 4)$$

O intervalo máximo de solução corresponde ao maior intervalo onde $y(t)$ está bem definida e é continuamente diferenciável. Neste caso, $I_{max} = \mathbb{R}$. Note que solução está definida (e é continuamente diferenciável) em $I = \mathbb{R}$, pois $a(t)$ e $b(t)$ são contínuas em $\mathbb{R}$.

(2) Determinar a solução do (PVI)

$$2xyy' + (1+x)y^2 = e^x \quad , \quad x > 0 \;\text{ e }\; y(1) = 2$$

efectuando a mudança de variável $v = y^2$.

Usando a sugestão, sendo $v = y^2$ tem-se que $v' = (y^2)' = 2yy'$. Substituindo na equação

$$xv' + (1+x)v = e^x \quad \Leftrightarrow \quad v' + \Big(\frac{1}{x} + 1\Big)v = \frac{e^x}{x}$$

Trata-se de uma equação linear, com $a(x) = \frac{1}{x} + 1$ e $b(x) = \frac{e^x}{x}$ obviamente contínuas para $x > 0$. Um factor integrante para a equação é:

$$\mu(x) = e^{\int \left(\frac{1}{x}+1\right)dx} = xe^x$$

Sendo assim

$$v' + \Big(\frac{1}{x} + 1\Big)v = \frac{e^x}{x} \;\Leftrightarrow\; xe^x v' + \Big(\frac{1}{x} + 1\Big)xe^x v = e^{2x} \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}\Big(xe^x v\Big) = e^{2x}$$

pelo que

$$v(x) = \frac{e^{2x} + c}{xe^x} \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

Dado que $v = y^2$, tem-se que

$$y(x) = \sqrt{\frac{e^{2x} + c}{xe^x}} \quad \text{ou} \quad y(x) = -\sqrt{\frac{e^{2x} + c}{xe^x}}$$

tendo-se o primeiro caso se a condição inicial for positiva e o segundo se a condição inicial for negativa. Assim e dado que $y(1) = 2 > 0$, tem-se que a solução do (PVI) é

$$y(x) = \sqrt{\frac{e^{2x} + 4e - e^2}{xe^x}}$$

1.2.3 Equações Separáveis

Uma equação escalar de primeira ordem, diz-se *separável* se pode ser escrita na forma

$$f(y)\frac{dy}{dt} = g(t) \tag{1.5}$$

Para se poder encontrar a sua solução geral, é necessário que f é g estejam definidas e sejam contínuas em subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$.

Se $F(y) = \int f(y)dy$ então:

$$\frac{d}{dt}F(y) = F'(y)\frac{dy}{dt} = f(y)\frac{dy}{dt} = g(t).$$

Em consequência, a solução geral da equação (1.5) é dada implicitamente por

$$\int f(y)dy = \int g(t)dt + C$$

Note que a equação anterior é da forma

$$\Phi(t,y) = C \qquad \text{onde} \quad \Phi(t,y) = F(y) - \int g(t)dt$$

Considere-se uma condição inicial genérica, $y(t_0) = y_0$. Se C for escolhido por forma a que (t_0, y_0) verifique a equação implícita, isto é, $C = \Phi(t_0, y_0)$, então o gráfico da solução do PVI é uma curva de nível da função $\Phi(t, y)$. Para ser possível definir uma função $S(t)$ tal que $y = S(t)$ seja a única solução da equação implícita numa vizinhança de t_0, isto é, para que, para (t, y) numa vizinhança de (t_0, y_0),

$$\Phi(t, y) = C \qquad \Leftrightarrow \qquad y = S(t)$$

então é obviamente necessário que a equação $\Phi(t, y) = C$ tenha uma e uma só solução pois, caso contrário, não se pode definir a função $S(t)$. Neste caso, $S(t)$ diz-se uma solução explícita (local) de $\Phi(t, y) = C$. Para poder concluir da existência de solução explícita local da equação, é útil o seguinte teorema:

Teorema da função implícita (em $\mathbb{R}^2$):

Seja $G : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ tal que $(t_0, y_0) \in D$, $G(t_0, y_0) = 0$ e

$$\frac{\partial G}{\partial y}(t_0, y_0) \neq 0.$$

Então a equação

$$G(t, y) = 0$$

define uma única função y de classe C^1 numa vizinhança de t_0 tal que $y(t_0) = y_0$ e:

$$G(t, y(t)) = 0$$

para t nessa vizinhança.

No caso presente, temos $G(t, y) = \Phi(t, y) - C$, pelo que:

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\Phi - C\big)(t_0, y_0) = F'(y_0) = f(y_0).$$

Consequentemente, basta verificar que $f(y_0) \neq 0$ para garantir a existência de solução explícita do PVI numa vizinhança de t_0.

Teorema: (Existência de solução (local) do PVI para a equação separável)

Sejam f e g funções reais de variável real contínuas em vizinhanças de y_0 e t_0 respectivamente. Se $f(y_0) \neq 0$, então o PVI

$$\begin{cases} f(y)\dfrac{dy}{dt} = g(t) \\ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admite solução única definida numa vizinhança de t_0. A solução é definida implicitamente pela equação

$$\int_{y_0}^{y} f(u)du = \int_{t_0}^{t} g(s)ds$$

ou, equivalentemente,

$$\int f(y)dy - \int g(t)dt = C,$$

com C determinado pela condição inicial $y(t_0) = y_0$.

Exemplo

(1) Determinar a solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y(x-3) \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

Para determinar soluções tais que $y(t) \neq 0$, para qualquer t:

$$\frac{dy}{dx} = y(x-3) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x-3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\int \frac{1}{y}\,dy = x-3 \quad \Leftrightarrow \quad \log|y| = \frac{x^2}{2} - 3x + C$$

pelo que a solução geral da equação é dada por

$$y(x) = Ke^{\frac{x^2}{2}-3x}, \qquad \text{com} \quad K \in \mathbb{R}$$

(Note que $y(t) \equiv 0$ também é solução da equação diferencial). Atendendo a que $y(0) = 5$ tem-se que $K = 5$ e como tal a solução do PVI é

$$y(x) = 5e^{\frac{x^2}{2}-3x}$$

O domínio de diferenciabilidade da função y é $\mathbb{R}$, pelo que o intervalo máximo de existência de solução é $I_{\max} = \mathbb{R}$. (Observe-se também que $y(t) \neq 0$, para todo o $t \in \mathbb{R}$, pelo que as equivalências acima são sempre válidas).

(2) Determinar a solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -3y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Note-se em primeiro lugar que a equação $\dfrac{dy}{dx} = -3y$ admite a solução de equilíbrio (ou constante) $y(x) \equiv 0$, mas esta solução só verifica a condição inicial no caso em que $y_0 = 0$. Para determinar soluções não constantes,

$$\frac{dy}{dx} = -3y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\int \frac{1}{y}\,dy = -3 \quad \Leftrightarrow \quad \log|y| = -3x + C$$

pelo que a solução geral da equação é dada por

$$y(x) = Ke^{-3x}$$

Atendendo a que $y(0) = y_0$ tem-se que $K = y_0$ e como tal a solução do PVI é

$$y(x) = y_0 e^{-3x}$$

Na Figura (2.1) encontra-se o traçado de algumas destas soluções. Note-se, em particular, que a solução constante, $y(x) \equiv 0$, tem a seguinte propriedade:

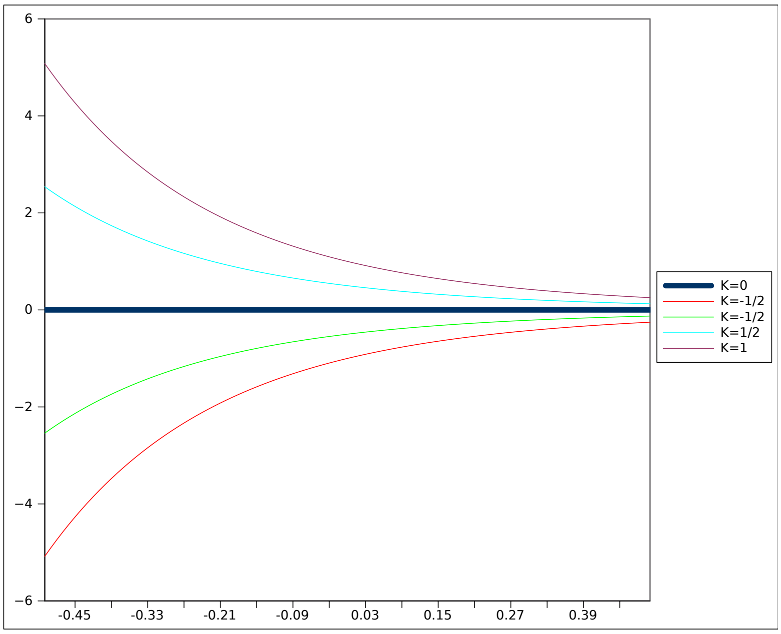

Figura 1.1: A solução de equilíbrio $y(t) \equiv 0$ e as soluções correspondentes a $y_0 = \pm 1/2$, $y_0 = \pm 1$..

1. Todas as outras soluções se aproximam de $y(x) \equiv 0$ quando $x \to +\infty$.
2. Todas as outras soluções se afastam de $y(x) \equiv 0$ quando $x \to -\infty$.

Devido à propriedade 1, dizemos que a solução $y(x) \equiv 0$ é assimptoticamente estável quando $x \to +\infty$.

1.2.4 Equações Exactas

Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $M, N : A \to \mathbb{R}$. Uma equação diferencial do tipo

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0 \tag{1.6}$$

diz-se exacta se e só se é equivalente a

$$\frac{d}{dt}\Big(\phi(t,y)\Big) = 0, \tag{1.7}$$

onde $\phi : A \to \mathbb{R}$ é de classe C^1.

A solução geral, na forma implícita, da equação exacta é, então:

$$\phi(t,y) = C, \qquad \text{com } C \in \mathbb{R}.$$

Em que condições existe uma tal função ϕ, de forma a que a equação (1.6) seja equivalente a (1.7)? Começamos por notar que a equação (1.7) se pode escrever:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0 \tag{1.8}$$

Comparando a equação (1.6) com (1.8), concluímos que para (1.6) ser exacta é necessário e suficiente que:

$$M = \frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad \text{e} \qquad N = \frac{\partial \phi}{\partial y}\ ,$$

ou seja, $(M, N) = \nabla\phi$, para certa função $\phi \in C^1(A, \mathbb{R})$. Isto é equivalente a dizer que o campo (M, N) é um campo gradiente [3].

Exemplo: as equações separáveis, como vimos, podem-se escrever na forma

$$-g(t) + f(y)\frac{dy}{dt} = 0,$$

onde $g : A \to \mathbb{R}$ e $f : B \to \mathbb{R}$ são contínuas [4] são exactas. De facto, basta tomar um potencial $\phi : A \times B \to \mathbb{R}$ dado por:

$$\phi(t, y) = \int f(y)dy - \int g(t)dt.$$

Este exemplo não parece muito interessante, pois obtivémos o potencial a partir do conhecimento prévio da solução geral da equação exacta.

Problemas mais interessantes – no sentido em que não podem ser facilmente resolvidos por outros métodos – podem-se abordar tomando como ponto de partida a seguinte (e já vossa conhecida) condição necessária para que um campo seja gradiente.

Proposição: se $A \subset \mathbb{R}^2$ é aberto e simplesmente conexo, $M, N : A \to \mathbb{R}$ são de classe C^1 e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \qquad \text{em} \ \ A$$

então existe $\phi : A \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que $(M, N) = \nabla\phi$. Em particular, isto implica que a equação $M(t, y) + N(t, y)y' = 0$ é exacta.

Exemplo

(1) Determinar a solução geral da equação

$$e^{4x} + 2xy^2 + (\cos y + 2x^2 y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Sendo

$$M(x, y) = e^{4x} + 2xy^2 \qquad \text{e} \qquad N(x, y) = \cos y + 2x^2 y$$

é fácil de verificar que

(i) M e N são continuamente diferenciáveis em $U = \mathbb{R}^2$;

(ii) $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 4xy = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

[3] $(M, N) : A \to \mathbb{R}$ é um campo gradiente com um potencial $\phi \in C^1(A, \mathbb{R})$.

[4] $A, B \subset \mathbb{R}$ são conjuntos abertos

Conclui-se que (M, N) é um campo gardiente em $\mathbb{R}^2$, isto é, existe $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla\Phi = (M, N)$.

Cálculo de Φ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = M \quad \Rightarrow \quad \Phi(x,y) = \int (e^{4x} + 2xy^2)\, dx + C(y) \quad \Rightarrow \quad \Phi(x,y) = \frac{e^{4x}}{4} + x^2y^2 + C(y)$$

e, por outro lado

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = N \quad \Rightarrow \quad 2x^2y + C'(y) = \cos y + 2x^2y \quad \Rightarrow \quad C(y) = \operatorname{sen} y + D$$

pelo que

$$\Phi(x,y) = \frac{e^{4x}}{4} + x^2y^2 + \operatorname{sen} y + D \ , \quad D \in \mathbb{R}$$

Resolução da equação

Nestas circunstâncias

$$e^{4x} + 2xy^2 + (\cos y + 2x^2y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\Big(\frac{e^{4x}}{4} + x^2y^2 + \operatorname{sen} y + D\Big) = 0$$

pelo que a solução geral da equação é definida implicitamente por

$$\frac{e^{4x}}{4} + x^2y^2 + \operatorname{sen} y = K \ , \quad K \in \mathbb{R}$$

1.2.5 Equações Redutíveis a Exactas

Qualquer equação escalar de primeira ordem é *redutível a exacta*, ou seja, pode ser transformada numa equação exacta, multiplicando-a por uma função $\mu(t, y)$ apropriada. A função μ denomina-se por um *factor integrante* da equação, e pode ser calculado resolvendo a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}$$

No geral é impossível de obter uma solução (explícita) para esta equação. Pode ser resolvida nos casos em que o factor integrante, μ depende apenas de uma variável.

- A equação diferencial

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0$$

é redutível a exacta, com factor integrante só dependendo de t, $\mu = \mu(t)$, se a função

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}$$

depender apenas de t. Se esta condição se verificar, o factor integrante é uma das soluções da equação diferencial

$$\dot{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}\mu$$

- A equação diferencial

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0$$

é redutível a exacta, com factor integrante só dependendo de y, $\mu = \mu(y)$, se a função

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

depender apenas de y. Se esta condição se verificar, o factor integrante é uma das soluções da equação diferencial

$$\dot{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}\mu$$

Em qualquer dos casos, a solução da equação inicial será dada por

$$\Phi(t,y) = C$$

em que Φ satisfaz

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mu M \qquad , \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \mu N$$

Exemplos:

1. Considere a equação diferencial

$$3x^2y + 2xy + y^3 + (x^2+y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

Sendo

$$M(x,y) = 3x^2y + 2xy + y^3 \qquad , \qquad N(x.y) = x^2 + y^2$$

é fácil de concluir que M e N têm derivada contínua em $\mathbb{R}^2$ (são funções polinomiais) e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2x + 3y^2 \qquad , \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

pelo que a equação não é exacta. Admitindo que é redutível a exacta, existe um factor integrante μ tal que a equação

$$(3x^2y + 2xy + y^3)\mu + (x^2+y^2)\mu\frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta. Pelo que

$$(3x^2y + 2xy + y^3)\frac{\partial \mu}{\partial y} + (3x^2 + 2x + 3y^2)\mu = (x^2+y^2)\frac{\partial \mu}{\partial x} + 2x\mu$$

Supondo que $\mu = \mu(x)$ (o que implica $\partial\mu/\partial y = 0$) tem-se que

$$(3x^2 + 2x + 3y^2)\mu = (x^2+y^2)\mu'(x) + 2x\mu \;\Leftrightarrow\; \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{3x^2 + 2x + 3y^2 - 2x}{x^2+y^2} = 3$$

Pod-se então verificar que a equação $\mu'(x)/\mu(x) = 3$ é possível de resolver (o segundo membro **não depende** de y), e como tal o factor integrante é $\mu(x) = e^{3x}$.

Considere-se então a equação

$$e^{3x}(3x^2y+2xy+y^3)+e^{3x}(x^2+y^2)\frac{dy}{dx}=0$$

que por construção é exacta: observe-se que as funções $e^{3x}(3x^2y+2xy+y^3)$ e $e^{3x}(x^2+y^2)$ são diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$, e

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[e^{3x}(3x^2y+2xy+y^3)\Big]=\frac{\partial}{\partial x}\Big[e^{3x}(x^2+y^2)\Big]$$

Sendo assim $(\mu M,\mu N)$ é um campo gardiente em $\mathbb{R}^2$, isto é, existe $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $\nabla\Phi=(\mu M,\mu N)$.

<u>Cálculo de Φ</u>

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=M\mu \quad\Rightarrow\quad \Phi(x,y)=\int\Big[e^{3x}(3x^2y+2xy+y^3)\Big]\,dx+C(y)$$

$$\Rightarrow\quad \Phi(x,y)=x^2ye^{3x}+\frac{y^3}{3}e^{3x}+c(y)$$

e, por outro lado

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\mu N \quad\Rightarrow\quad (x^2+y^2)e^{3x}+C'(y)=e^{3x}(x^2+y^2) \quad\Rightarrow\quad C(y)=\text{const.}$$

pelo que

$$\Phi(x,y)=x^2ye^{3x}+\frac{y^3}{3}e^{3x}+\text{const.}\ \ ,\ \ \text{const.}\in\mathbb{R}$$

<u>Resolução da equação</u>

Nestas circunstâncias

$$3x^2y+2xy+y^3+(x^2+y^2)\frac{dy}{dx}=0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{3x}(3x^2y+2xy+y^3)+e^{3x}(x^2+y^2)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{d}{dx}\Big(x^2ye^{3x}+\frac{y^3}{3}e^{3x}+\text{const.}\Big)=0$$

pelo que a solução geral da equação é definida implicitamente por

$$x^2ye^{3x}+\frac{y^3}{3}e^{3x}=k\ \ ,\ \ k\in\mathbb{R}$$

2. Considere a equação diferencial

$$y+(2xy-e^{-2y})\frac{dy}{dx}=0$$

Sendo

$$M(x,y)=y \qquad , \qquad N(x.y)=2xy-e^{-2y}$$

é fácil de concluir que M e N têm derivada contínua em $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \qquad , \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$$

pelo que a equação não é exacta. Admitindo que é redutível a exacta, existe um factor integrante μ tal que a equação

$$y\mu + (2xy - e^{-2y})\mu\frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta. Pelo que

$$y\frac{\partial\mu}{\partial y} + \mu = (2xy - e^{-2y})\frac{\partial\mu}{\partial x} + 2y\mu$$

Supondo que $\mu = \mu(x)$ (o que implica $\partial\mu/\partial y = 0$) tem-se que

$$\mu = (2xy - e^{-2y})\mu'(x) + 2y\mu \ \Leftrightarrow\ \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{1-2y}{2xy - e^{-2y}}$$

É fácil de verificar que a função $\dfrac{1-2y}{2xy - e^{-2y}}$ não depende apenas da variável x, pelo que **não existe** factor de integração dependendo apenas de x.
Supondo agora que $\mu = \mu(y)$ (o que implica $\partial\mu/\partial x = 0$) tem-se que

$$y\mu' + \mu = 2y\mu \ \Leftrightarrow\ \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{2y-1}{y}$$

Pode-se então verificar que a equação $\mu'(y)/\mu(y) = (2y-1)/y$ é possível de resolver (o segundo membro **depende** apenas de y), e como tal o factor integrante é $\mu(y) = \dfrac{e^{2y}}{y}$.
Considere-se então a equação

$$e^{2y} + \left(2xe^{2y} - \frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

que por construção é exacta: observe-se que as funções e^{2y} e $2xe^{2y} - \frac{1}{y}$ são diferenciáveis em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$, e

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[e^{2y}\Big] = \frac{\partial}{\partial x}\Big[2xe^{2y} - \frac{1}{y}\Big]$$

Sendo assim $(\mu M, \mu N)$ é um campo gradiente em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ (ou em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$), isto é, existe $\Phi : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \to \mathbb{R}$ (ou $\Phi : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\} \to \mathbb{R}$) tal que $\nabla\Phi = (\mu M, \mu N)$.

<u>Cálculo de Φ</u>

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = M\mu \ \Rightarrow\ \Phi(x,y) = \int \Big[e^{2y}\Big]\,dx + C(y) \ \Rightarrow\ \Phi(x,y) = xe^{2y} + c(y)$$

e, por outro lado

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \mu N \ \Rightarrow\ 2xe^{2y} + C'(y) = 2xe^{2y} - \frac{1}{y} \ \Rightarrow\ C(y) = -\log|y| + \text{const.}$$

pelo que

$$\Phi(x,y) = xe^{2y} - \log|y| + \text{const.} \quad , \quad \text{const.} \in \mathbb{R}$$

Resolução da equação

Nestas circunstâncias, para $y \neq 0$

$$y + (2xy - e^{-2y})\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2y} + (2xe^{2y} - \frac{1}{y})\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\Big(xe^{2y} - \log|y| + \text{const.}\Big) = 0$$

pelo que a solução geral da equação é definida implicitamente por

$$xe^{2y} - \log|y| = k \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

1.3 Equações Diferenciais Ordinárias de ordem n. Equações Vectoriais.

Uma equação diferencial ordinária de ordem n é uma equação da forma

$$y^{(n)}(t) = f\Big(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(n-1)}(t)\Big)$$

ou seja é uma equação que relaciona uma função, $y(t)$, e as suas primeiras n derivadas. A sua solução é uma função real pertencente ao espaço vectorial

$$C^n(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ é contínua e com todas as derivadas até à ordem } n \text{ contínuas}\}$$

que verifica a equação diferencial. A solução geral de uma equação diferencial de ordem n dependerá de n constantes arbitrárias. Um problema de valor inicial para esta equação será da forma

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = f\Big(t, y(t), y'(t), \cdots, y^{(n-1)}(t)\Big) \\ \\ y(t_0) = y_0 \, , \, y'(t_0) = y_1 \, , \, y''(t_0) = y_2 \, , \cdots \, , \, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

No caso das equações de ordem 2 é também comum a resolução de *problemas de valor na fronteira*. Por exemplo no problema

$$\begin{cases} y''(t) = f\Big(t, y(t), y'(t)\Big) \quad \text{para} \quad t \in [a,b] \\ \\ y(a) = \alpha \quad , \quad y(b) = \beta \end{cases}$$

são conhecidos os valores da função $y(t)$ na fronteira do domínio.

1.3.1 Equações Lineares de ordem n. Caso Homogéneo.

Uma equação de ordem $n \in \mathbb{N}$ diz-se *linear* se puder ser escrita na forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + ... + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = b(t) \tag{1.9}$$

onde $a_0(t)$, $a_1(t)$,..., $a_{n-1}(t)$ e $b(t)$ são funções reais definidas e contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Exemplo: As equações de ordem 2

$$y'' + 5y' = e^t \qquad , \qquad y'' - \frac{5}{t}\, y' = 1$$

são equações lineares, a equação de ordem 3

$$y''' = y\, y'\, y''$$

não é linear.

Nesta Secção estudaremos o caso homogéneo, isto é vamos resolver a equação (1.45) no caso em que $b(t) \equiv 0$,

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + ... + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = 0\ . \tag{1.10}$$

Iremos agora enunciar algumas propriedades importantes das soluções de (1.10).

Princípio da Sobreposição de Soluções

Se $u(t)$ e $v(t)$ são soluções (reais ou complexas) de (1.10), então $c_1 u(t) + c_2 v(t)$ é tambem solução de (1.10), para quaisquer constantes (reais ou complexas) c_1, c_2.

Deixaremos a demonstração como um exercício.

É de notar que esta propriedade é consequência da linearidade da derivada, e é verificada por **todas** as equações lineares homogéneas (diferenciais ou de outro tipo).

Observe-se que a função nula, $y(t) \equiv 0$ é solução da equação (1.10). Atendendo ao Princípio da Sobreposição podemos concluir que o espaço de soluções da equação (1.10) é um subespaço linear de $C^n(\mathbb{R})$. Veremos no capítulo seguinte que se trata de um subespaço de dimensão n.

Assim sendo, a sua solução geral é da forma

$$y(t) = \alpha_1 y_1 + ... + \alpha_n y_n$$

em que α_1, ... , α_n são constantes reais, e y_1,..., y_n são n soluções linearmente independentes da equação.

Com esta generalidade não há forma sistemática de determinar uma base para o espaço de soluções da equação linear homogénea.

1.3.2 Equações Lineares Homogéneas de 2ª ordem de Coeficientes Constantes

Como exemplo introdutório deste tópico, estudamos agora o caso especial das equações lineares de 2ª ordem:

$$\ddot{y} + a_1(t)\, \dot{y} + a_0(t)\, y = b(t) \tag{1.11}$$

A equação linear *homogénea* de 2ª ordem é a equação (1.11) no caso especial $b(t) = 0$, isto é:

$$\ddot{y} + a_1(t)\, \dot{y} + a_0(t)\, y = 0 \tag{1.12}$$

Estudemos agora a equação (1.12) no caso em que os coeficientes são constantes, ou seja:

$$\ddot{y} + a_1\,\dot{y} + a_0\,y = 0 \qquad \text{com} \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R} \tag{1.13}$$

O *polinómio característico* desta equação diferencial é definido por:

$$P(r) = r^2 + a_1 r^1 + a_0 r^0 = r^2 + a_1 r + a_0$$

As raízes de $P(r)$ são os valores (reais ou complexos):

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}\right)$$

Consoante o tipo de raízes, há três casos possíveis:

Caso 1: **duas raízes reais distintas** se $a_1^2 - 4a_0 > 0$.

Caso 2: **uma raiz real dupla** se $a_1^2 - 4a_0 = 0$.

Caso 3: **duas raízes complexas conjugadas** se $a_1^2 - 4a_0 < 0$.

Denotando as raízes de $P(r)$ por λ_1 e λ_2, podemos factorizar o polinómio característico da seguinte forma:

$$P(r) = (r-\lambda_1)(r-\lambda_2) \qquad \text{ou} \qquad P(r) = (r-\lambda_1)^2 \quad \text{se} \;\; \lambda_1 = \lambda_2$$

Vamos agora definir o operador derivada, D, por $Dy = \dfrac{dy}{dt} = \dot{y}$ [5]. Então a equação (1.13) pode-se escrever na forma

$$D^2 y + a_1 D y + a_0 y = 0,$$

que é equivalente a:

$$\left(D^2 + a_1 D + a_0\right) y = 0$$

Eis algumas definições e propriedades relevantes dos operadores que iremos utilizar:

- D é um operador linear i.e. $D(cy_1 + dy_2) = c\,Dy_1 + d\,Dy_2$, onde c, d são escalares, $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)
- Soma dos operadores A e B: $(A+B)y = Ay + By$
- Produto de um operador A por um escalar c: $(cA)y = c(Ay)$
- Produto dos operadores A e B: $(AB)y = A(By)$; trata-se, de facto, da composição dos operadores A, B.

[5] O operador derivada é, de facto, a aplicação $D : C^1(I) \to C(I)$ definida por $Dy = \dot{y}$, onde I é um intervalo aberto. Estas aplicações cujo domínio é um conjunto de funções reais (ou complexas) designam-se comunmente, na literatura matemática, por *operadores*.

Notamos que o produto de operadores é, em geral, *não comutativo*. Por exemplo, os operadores D e $Ay = f(t)y(t)$

$$DAy = D(f(t)y(t) = f'(t)y(t) + f(t)y'(t)$$

$$ADy = A(Dy) = Ay' = f(t)y'(t)$$

Logo o operador $Ay = f(t)y(t)$ apenas comuta com D se $f'(t) = 0$, isto é, $Ay = cy$, onde c é uma constante.

Vejamos agora como proceder à factorização do *polinómio diferencial*

$$P(D) = D^2 + a_1 D + a_0.$$

Tendo em conta que

$$P(r) = r^2 + a_1 r + a_0 = (r - \lambda_1)(r - \lambda_2) \tag{1.14}$$

então $P(D)$ factoriza-se de forma análoga a $P(r)$:

$$P(D) = D^2 + a_1 D + a_0 = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)$$

Vejamos porquê. Usando a linearidade dos operadores e o facto de D comutar com o operador produto por uma constante, cI ($c \in \mathbb{R}$ ou $c \in \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned}(D-\lambda_1)(D-\lambda_2) &= D(D-\lambda_2) - \lambda_1(D-\lambda_2) = D^2 - D\lambda_2 - \lambda_1 D + \lambda_1\lambda_2 \\ &= D^2 - \lambda_2 D \lambda_1 D + \lambda_1\lambda_2 = D^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)D + \lambda_1\lambda_2\end{aligned}$$

Ora, os coeficientes do polinómio do 2º grau (1.14) verificam $a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ e $a_0 = \lambda_1\lambda_2$, pelo que

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) = D^2 + a_1 D + a_0.$$

A equação diferencial é pois equivalente a:

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = 0 \qquad \text{se} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

e a

$$(D - \lambda_1)^2 y = 0 \qquad \text{se} \quad \lambda_1 = \lambda_2$$

Vejamos agora como usar a factorização do polinómio diferencial para determinar a solução geral da equação homogénea. Tendo em conta que $D - \lambda_1$ e $D - \lambda_2$ comutam [6]:

$$(D - \lambda_1)\underbrace{(D - \lambda_2)y}_{=0} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (D - \lambda_2)\underbrace{(D - \lambda_1)y}_{=0} = 0$$

Isto é, as soluções de $(D - \lambda_1)y = 0$ e de $(D - \lambda_2)y = 0$ são certamente soluções de (1.13).

Resolvendo então $(D - \lambda)y = 0$ (com $\lambda = \lambda_1$ ou $\lambda = \lambda_2$):

$$\dot{y} + \lambda y = 0 \qquad \text{uma solução é} \quad y(t) = e^{\lambda t}$$

[6] Isto é, $(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) = (D - \lambda_2)(D - \lambda_1)$, pois $\frac{d}{dt}(\lambda y) = \lambda \frac{dy}{dt}$, para qualquer constante c). O mesmo não se verifica quando em vez de c se tem uma função $f(t)$, pois há um termo adicional na derivada do produto $f(t)y(t)$.

No caso $\lambda_1 \neq \lambda_2$, obtêm-se *duas soluções linearmente independentes*:

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} \qquad \text{e} \qquad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

No caso $\lambda_1 = \lambda_2$, o procedimento anterior permite apenas encontrar uma solução linearmente independente de $(D-\lambda_1)^2 y = 0$: $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$.

Para obter uma segunda, escrevemos um sistema de equações equivalente à equação tomando $v = (D-\lambda_1)y$:

$$(D-\lambda_1)\underbrace{(D-\lambda_1)y}_{v} = 0$$

$$\begin{cases} (D-\lambda_1)v = 0 \\ (D-\lambda_1)y = v \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} v = e^{\lambda_1 t} \\ \dot{y} - \lambda_1 y = e^{\lambda_1 t} \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} v = e^{\lambda_1 t} \\ y = te^{\lambda_1 t} \end{cases}$$

Assim, se $\lambda_1 = \lambda_2$, obtivémos estas *duas soluções* (que também são *linearmente independentes*):

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} \qquad \text{e} \qquad y_2(t) = te^{\lambda_1 t}$$

Como vimos anteriormente, o espaço de soluções da equação (1.13) tem dimensão 2, o que significa que a solução geral da mesma pode ser dada por:

Caso 1: $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Caso 2: $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t}$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Caso 3: $y(t) = d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t}$, com $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$. Note que, neste caso, esta fórmula representa o espaço vectorial das *soluções complexas* da equação (1.13).

No caso 3, e para obter uma fórmula para a solução geral real, notamos em primeiro lugar que $P(r)$ é um polinómio de coeficientes reais pelo que se $\lambda_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ (onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são a parte real e a parte imaginária de λ_1) então $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \alpha - \mathrm{i}\beta$. Então:

$$e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t}\cos(\beta t) + ie^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$$

$$e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = e^{\alpha t}\cos(\beta t) - ie^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$$

Como $\operatorname{Re} e^{\lambda_1 t}$ e $\operatorname{Im} e^{\lambda_1 t}$ também são soluções de (1.13), então duas soluções *reais* linearmente independentes são,

$$u_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t) \qquad \text{e} \qquad u_2(t) = e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t).$$

Assim sendo:

Caso 3 (soluções reais): $y(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1: resolver a equação $y'' - 4y = 0$.

Usando a notação $y' = Dy$, a equação pode ser escrita na forma $(D^2-4)y = 0$. O polinómio característico associado à equação é $P(r) = r^2 - 4 = (r-2)(r+2)$. Então

$$\begin{aligned} (D^2-4)y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (D-2)(D+2)y = 0 \\ &\Leftarrow \quad (D-2)y = 0 \ \text{ ou } \ (D-2)y = 0 \end{aligned}$$

Assim, duas soluções linearmente independentes são e^{2t} e e^{-2t}, pelo que uma base do espaço de soluções de $(D-2)(D+2)y=0$ é $< e^{2t}, e^{-2t} >$. Concluimos que a solução geral da equação $y''-4y=0$ é $y(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}$, com $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

Exemplo 2: resolver a equação $y''-6y'+9y=0$.

Usando a notação $y'=Dy$, a equação pode ser escrita na forma $(D^2-6D+9)y=0$. O polinómio característico associado à equação é $P(r)=r^2-6r+9=(r-3)^2$. Então uma base do espaço de soluções de

$$(D^2-6D+9)y=0 \Leftrightarrow (D-3)^2y=0$$

é $< e^{3t}, te^{3t} >$, e a solução geral da equação $y''-6y'+9y=0$ é $y(t)=c_1e^{3t}+c_2te^{3t}$, com $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

Exemplo 3: resolver a equação $y''+2y'+2y=0$.

Usando a notação $y'=Dy$, a equação pode ser escrita na forma $(D^2+2D+2)y=0$. O polinómio característico associado à equação é $P(r)=r^2+2r+2=(r+1-\mathrm{i})(r+1+\mathrm{i})$. Então uma base do espaço de soluções reais de

$$(D^2-2D+2)y=0 \Leftrightarrow (D+1-\mathrm{i})(D+1+\mathrm{i})y=0$$

é $< e^t\cos t, e^t\operatorname{sen} t >$. Desta forma, a solução geral da equação $y''+2y'+2=0$ é dada por $y(t)=c_1e^t\cos t+c_2e^t\operatorname{sen} t$, com $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

1.3.3 Equações Lineares de Ordem n de Coeficientes Constantes

Uma equação de ordem $n\in\mathbb{N}$ diz-se linear de coeficientes constantes, se puder ser escrita na forma

$$y^{(n)}+a_{n-1}\,y^{(n-1)}+\ldots+a_1\,y'+a_0\,y=h(t) \tag{1.15}$$

em que a_0, a_1,..., a_n são constantes reais, e $b: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua em I.

A equação homogénea associada a (1.15) é

$$y^{(n)}+a_{n-1}\,y^{(n-1)}+\ldots+a_1\,y'+a_0\,y=0\,, \tag{1.16}$$

e corresponde a tomar $h(t)\equiv 0$ em (1.15).

Usando a notação $Dy=y'$ (e consequentemente $D^2y=y''$, ..., $D^n=y^{(n)}$), a equação (1.16) pode ser escrita na forma

$$\Big(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\ldots+a_1D+a_0\Big)y=0$$

e definindo $P(D)=D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\ldots+a_1D+a_0$, a equação pode ser escrita na forma abreviada

$$P(D)y=h(t)$$

É preciso notar que $P(D)$ é, tal como D, um operador linear, ou seja, uma aplicação linear cujo domínio é o conjunto das funções de classe C^n, sendo n o grau de P. O termo $P(D)$ designa um *polinómio diferencial*. Tal como vimos no caso das equações lineares de 2ª ordem ($n=2$), pela linearidade da derivada deduz-se que pode ser factorizado de forma análoga ao polinómio numérico $P(r)$, onde r é uma variável complexa. Por exemplo, se y é uma função de classe C^4:

$$(D^4-16)y=(D^2-4)(D^2+4)y=(D-2)(D+2)(D-2i)(D+2i)y.$$

Determinemos agora uma fórmula para a solução geral da equação linear não homogénea (1.45). Se $y(t)$ é uma solução *arbitrária* de (1.45) e $y_P(t)$ uma solução particular da mesma equação então, pela linearidade dos operadores derivada:

$$\begin{aligned} &D^n(y-y_P)+a_{n-1}D^{n-1}(y-y_P)+a_1D(y-y_P)+a_0(y-y_P)\\ &\quad= \underbrace{D^ny+a_{n-1}D^{n-1}y+a_1Dy+a_0y}_{=b(t)}-\big(\underbrace{D^ny_P+a_{n-1}D^{n-1}y_P+a_1Dy_P+a_0y_P}_{=b(t)}\big)\\ &\quad= b(t)-b(t)=0\end{aligned}$$

Isto significa que a diferença $y(t)-y_P(t)$ é uma solução da equação homogénea; o que sugere a solução geral da equação não homogénea (1.45) é da forma

$$y(t)=y_G(t)+y_P(t)$$

em que $y_G(t)$ é a solução geral da equação homogénea associada e $y_P(t)$ é uma *solução particular* da equação não homogénea. Ora

$$\begin{aligned} &D^n(y_G+y_P)+a_{n-1}D^{n-1}(y_G+y_P)+a_1D(y_G-y_P)+a_0(y_G-y_P)\\ &\quad= \underbrace{D^ny_G+a_{n-1}D^{n-1}y_G+a_1Dy_G+a_0y_G}_{=0}+\underbrace{D^ny_P+a_{n-1}D^{n-1}y_P+a_1Dy_P+a_0y_P}_{=b(t)}\\ &\quad= 0+b(t)=b(t)\end{aligned}$$

o que mostra que $y(t)=y_G(t)+y_P(t)$ é, de facto, a solução geral da equação não homogénea.

Veremos em seguida como se determina a solução geral da equação homogénea.

1.3.4 Equações Homogéneas de Ordem n de Coeficientes Constantes

Consideremos agora a equação de ordem n de coeficientes constantes:

$$y^{(n)}+a_{n-1}\,y^{(n-1)}+\ldots+a_1\,y'+a_0\,y=b(t)$$

onde $a_0,a_1,\ldots a_{n-1}\in\mathbb{R}$ e $b(t)$ é uma função real definida e contínua em I.

Tomando $b(t)\equiv 0$, obtém-se a equação homogénea associada:

$$y^{(n)}+a_{n-1}\,y^{(n-1)}+\ldots+a_1\,y'+a_0\,y=0 \tag{1.17}$$

Considerando, como anteriormente, o operador diferencial $D=\frac{d}{dt}$, podemos escrever (1.17) na forma

$$\underbrace{\left(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0\right)}_{P(D)}y=0$$

Define-se então o *polinómio característico* da equação (não homogénea ou homogénea) por:

$$P(R)=R^n+a_{n-1}R^{n-1}+\cdots+a_1R+a_0$$

Para obter as soluções da equação homogénea, vamos recorrer à factorização do polinómio característico. Admitindo que as raízes de $P(R)$ são:

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \text{com multiplicidade} & m_1 \\ \lambda_2 & \text{com multiplicidade} & m_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_k & \text{com multiplicidade} & m_k \end{array}$$

então
$$P(R) = (R-\lambda_1)^{m_1}(R-\lambda_2)^{m_2}\cdots(R-\lambda_k)^{m_k},$$

onde, tendo em conta que o grau de $P(R)$ é n,

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n.$$

Tal como no caso das equações de ordem 2, o polinómio diferencial factoriza-se da mesma forma que $P(R)$:
$$P(D) = (D-\lambda_1)^{m_1}(D-\lambda_2)^{m_2}\cdots(D-\lambda_k)^{m_k}$$

Como $D-\lambda_i$ comuta com $D-\lambda_j$, pode-se trocar a ordem dos factores. Então as soluções de

$$(D-\lambda_j)^{m_j}y = 0 \qquad \text{com} \quad j = 1, 2, \ldots, k$$

são soluções de $P(D)y = 0$.

Para $m_j = 1$, obtivémos a solução $e^{\lambda_j t}$.

No caso $m_j = 2$, obtivémos duas soluções linearmente independentes:

$$e^{\lambda_j t} \quad , \quad te^{\lambda_j t}$$

Para o caso geral, é útil o seguinte resultado.

Proposição: Sejam $k, m \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então, para $k < m$:

$$(D-\lambda)^m t^k e^{\lambda t} = 0$$

Demonstração:

$$(D-\lambda)t^k e^{\lambda t} = kt^{k-1}e^{\lambda t} + t^k\lambda e^{\lambda t} - \lambda t^k e^{\lambda t} = kt^{k-1}e^{\lambda t}$$

Iterando a fórmula anterior:

$$\begin{aligned} (D-\lambda)^m t^k e^{\lambda t} &= (D-\lambda)^{m-1}kt^{k-1}e^{\lambda t} \\ &= (D-\lambda)^{m-2}k(k-1)t^{k-2}e^{\lambda t} \\ &\vdots \\ &= (D-\lambda)^{m-k+1}k(k-1)\cdots 2\, te^{\lambda t} \\ &= (D-\lambda)^{m-k}k!e^{\lambda t} \;=\; 0 \end{aligned}$$

Aplicando a proposição anterior, obtemos soluções da forma $t^l e^{\lambda t}$ para $l < m_j$; ou seja:

- **Caso 1:** $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Então

  $$e^{\lambda_j t}\,,\quad te^{\lambda_j t}\,,\quad t^2e^{\lambda_j t}\quad \ldots\,,\quad t^{m_j-1}e^{\lambda_j t}$$

  são m_j soluções (reais) linearmente independentes.

- **Caso 2:** $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j \in \mathbb{C}$. Isto implica que $\bar{\lambda}_j = \alpha_j - i\beta_j$ também é raiz de $P(R)$. Neste caso, obtêm-se $2m_j$ soluções linearmente independentes,

  $$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_j t}\,, & te^{\lambda_j t}\,, & t^2e^{\lambda_j t} & \ldots\,, & t^{m_j-1}e^{\lambda_j t} \\ e^{\bar{\lambda}_j t}\,, & te^{\bar{\lambda}_j t}\,, & t^2e^{\bar{\lambda}_j t} & \ldots\,, & t^{m_j-1}e^{\bar{\lambda}_j t}. \end{array}$$

  Porém, estas soluções são complexas.

  No entanto, tendo em conta que:

  $$e^{\lambda_j t} = e^{\alpha_j t}e^{i\beta_j t} = e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t) + ie^{\alpha_j t}\operatorname{sen}(\beta_j t)$$

  $$e^{\bar{\lambda}_j t} = e^{\alpha_j t}e^{-i\beta_j t} = e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t) - ie^{\alpha_j t}\operatorname{sen}(\beta_j t)$$

  então pelo princípio da sobreposição,

  $$\frac{1}{2}\left(t^m e^{\lambda_j t} + t^m e^{\bar{\lambda}_j t}\right) = t^m e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t)$$

  $$\frac{1}{2i}\left(t^m e^{\lambda_j t} - t^m e^{\bar{\lambda}_j t}\right) = t^m e^{\alpha_j t}\operatorname{sen}(\beta_j t)$$

  são também soluções (e são funções reais). Assim, a partir do par de raízes $\alpha \pm i\beta$ de multiplicidades m_j obtêm-se $2m_j$ soluções linearmente independentes (reais):

  $$\begin{array}{ccccccc} e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t) & , & te^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t) & , & \ldots & , & t^{m_j-1}e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t) \\ e^{\alpha_j t}\operatorname{sen}(\beta_j t) & , & te^{\alpha_j t}\operatorname{sen}(\beta_j t) & , & \ldots & , & t^{m_j-1}e^{\alpha_j t}\operatorname{sen}(\beta_j t) \end{array}$$

O número total de soluções reais linearmente independentes obtidas pelo procedimento anterior é igual ao número de raízes, contando as multiplicidades, do polinómio característico; ou seja, igual a:

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$$

Este procedimento permite assim obter uma **base** para o **espaço vectorial das soluções** da equação homogénea (1.17) constituida apenas por funções reais.

Exemplo 1:
Consideremos a equação

$$y^{(6)} + y^{(5)} + y^{(4)} + y^{(3)} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (D^6 + D^5 + D^4 + D^3)y = 0$$

O seu polinómio característico (e factorização) é:

$$\begin{aligned} P(R) &= R^6 + R^5 + R^4 + R^3 = R^3(R^3 + R^2 + R + 1) \\ &= R^3(R+1)(R^2+1) = R^3(R+1)(R-i)(R+i) \end{aligned}$$

As raízes do polinómio característico (e correspondentes soluções da equação diferencial) são :

- $\lambda = 0$, com multiplicidade 3:

$$\underbrace{e^{0t}}_{1} \quad , \quad \underbrace{te^{0t}}_{t} \quad , \quad \underbrace{t^2e^{0t}}_{t^2}$$

- $\lambda = -1$, com multiplicidade 1

$$e^{-t}$$

- $\lambda = \pm i$, com multiplicidade 1

$$\underbrace{e^{0t}\cos(1t)}_{\cos t} \quad , \quad \underbrace{e^{0t}\,\mathrm{sen}(1t)}_{\mathrm{sen}\, t}$$

A solução geral da equação é:

$$y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 e^{-t} + c_5 \cos t + c_6 \,\mathrm{sen}\, t$$

com $c_1, c_2, \ldots, c_6 \in \mathbb{R}$.

Problema de valor inicial

Para obter um problema bem posto (onde veremos que a solução existe e é única), será necessário prescrever o valor da solução e das suas derivadas até à ordem $n-1$, num ponto $t_0 \in \mathbb{R}$:

O problema de valor inicial para uma equação de ordem n tem, então, a forma:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = b(t) \\ y(t_0) = y_{0,0}, \quad y'(t_0) = y_{0,1}, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{0,n-1} \end{cases} \tag{1.18}$$

onde $t_0 \in \mathbb{R}$ e $y_{0,0}\,, y_{0,1}\,, \ldots,\, y_{0,n-1} \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1 (continuação): No exemplo acima discutido, vamos acrescentar as condições iniciais:

$$y(0) = y'(0) = 1 \quad , \quad y''(0) = y^{(3)}(0) = y^{(4)}(0) = y^{(5)}(0) = 0$$

Calculando as derivadas (até à ordem 5) da solução geral e substituindo os valores dados pelas condições iniciais, obtém-se:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 0 \\ y^{(3)}(0) = 0 \\ y^{(4)}(0) = 0 \\ y^{(5)}(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_4 + c_5 = 1 \\ c_2 - c_4 + c_6 = 1 \\ 2c_3 + c_4 - c_5 = 0 \\ -c_4 - c_6 = 0 \\ c_4 + c_5 = 0 \\ -c_4 + c_6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \\ c_5 = 0 \\ c_4 = c_6 = 0 \end{cases}$$

Desta forma, a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = 1 + t.$$

Para a determinação dos valores de $c_1, \dots, c_6$ obteve-se um sistema de 6 equações lineares que tem solução única. No geral, para qualquer problema de valor inicial para uma equação diferencial linear homogénea de ordem n de coeficientes constantes (1.17) isto é sempre verdade: das n condições iniciais obtém-se um sistema linear de n equações e n incógnitas que tem uma única solução, em todos os casos. Note-se que se o mesmo tivesse mais que uma solução as funções da base de soluções seriam linearmente dependentes (o que não é o caso).

Ainda assim, não ficou esclarecida a questão de poderem existir outras soluções distintas das que se obtêm a partir de combinações lineares de exponenciais do tipo $e^{\lambda t}$. Deixemos esta questão para depois; por ora, vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 2:
Determinar a solução geral da equação

$$y''' + 4y'' + 4y' = 0 \tag{1.19}$$

Fazendo $y' = Dy$, a equação pode ser escrita na forma

$$(D^3 + 4D^2 + 4D)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D(D+2)^2 y = 0 \quad \Leftarrow \quad Dy = 0 \text{ ou } (D+2)^2 y = 0$$

Podemos então obter soluções linearmente independentes da equação (1.19) resolvendo $Dy = 0$ e $(D+2)^2 y = 0$. Uma solução da equação $Dy = 0$ é e^{0t}. Por outro lado a equação $(D+2)^2 y = 0$ tem como soluções, por exemplo, e^{-2t} e te^{-2t}. Como tal a solução geral de (1.19) é

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-2t} + c_3 t e^{-2t} \quad , \quad c_1,\ c_2\ c_3 \in \mathbb{R}$$

Exemplo 3:
Determinar a solução do PVI

$$y'' + 8y' + 12y = 0 \quad , \quad y(0) = 3 \ , \ y'(0) = -14 \tag{1.20}$$

Comecemos por determinar a solução geral da equação. Fazendo $y' = Dy$, a equação pode ser escrita na forma

$$(D^2 + 8D + 12)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D+2)(D+6)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D+6)y = 0 \text{ ou } (D+2)y = 0$$

Uma solução da equação $(D+6)y = 0$ é e^{-6t}. Por outro lado a equação $(D+2)y = 0$ tem como solução e^{-2t}. Como tal a solução geral da equação é dada por

$$y(t) = c_1 e^{-6t} + c_2 e^{-2t} \quad , \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Para que as condições iniciais se verifiquem

$$\begin{cases} y(0) = 3 \\ y'(0) = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ -6c_1 - 2c_2 = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Finalmente a solução de (1.20) é

$$y(t) = 2e^{-6t} + e^{-2t}$$

Exemplo 4:
Determinar a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \tag{1.21}$$

Fazendo $y' = Dy$, a equação pode ser escrita na forma

$$(D^2 + 2D + 2)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D - (-1 + i))(D - (-1 - i)))y = 0$$

As soluções complexas da equação são $e^{(-1+i)t}$ e $e^{(-1-i)t}$, pelo que Re $e^{(-1+i)t}$ e Im $e^{(-1+i)t}$ serão soluções reais de (1.21). Assim, a solução geral de (1.21) é

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \operatorname{sen} t \quad , \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Vejamos agora que o problema de valor inicial (1.18) só pode ter uma única solução.

Em primeiro lugar, efectuando a mudança de variável $s = t - t_0$, podemos admitir sem perda de generalidade que (1.18) tem a forma:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = b(t) \\ y(0) = y_{0,0}, \quad y'(0) = y_{0,1}, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_{0,n-1} \end{cases}$$

onde $y_{0,0}\,, y_{0,1}\,, \ldots,\ y_{0,n-1} \in \mathbb{R}$. Admitindo que $y(t)$ e $\tilde{y}(t)$ são duas soluções deste PVI, então $z(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$ satisfaz o **PVI homogéneo**:

$$\begin{cases} z^{(n)} + a_{n-1}\, z^{(n-1)} + \ldots + a_1\, z' + a_0\, z = 0 \\ z(0) = z'(t_0) = \cdots = z^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases} \tag{1.22}$$

Vejamos que (1.22) tem como solução única a função nula, $z(t) \equiv 0$.

Utilizando a factorização do polinómio característico, a equação diferencial em (1.22) pode-se escrever

$$P(D)z = (D - \lambda_1)\underbrace{(D - \lambda_2)\cdots(D - \lambda_n)z}_{\substack{\| \\ P_{n-1}(D)z}} = 0.$$

em que $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ são as raízes de $P(r)$ (esta lista pode conter valores repetidos, de acordo com as multiplicidades de cada raiz) e $P_{n-1}(r)$ é o quociente de $P(r)$ por $r - \lambda_1$.

Seja $u = P_{n-1}(D)z$. Pela condição inicial, e tendo em conta que $P_{n-1}(D)$ envolve apenas derivadas até à ordem $n - 1$:

$$u(0) = P_{n-1}(D)z(0) = 0.$$

Então u satisfaz o PVI de 1ª ordem

$$\begin{cases} (D - \lambda_1)u = 0 \ \Leftrightarrow \ u' - \lambda_1 u = 0 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

que tem como única solução a função nula [7]. Assim sendo, concluimos que

$$u(t) = P_{n-1}(D)z = (D - \lambda_2)\cdots(D - \lambda_n)z = 0.$$

[7] Sendo u uma solução arbitrária de $u' - \lambda u = 0$ (com $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$), seja $v(t) = e^{-\lambda t}u(t)$. Então

$$v' = -\lambda e^{-\lambda t}u + e^{-\lambda t}u' = e^{-\lambda t}(u' - \lambda u) \equiv 0$$

pelo que $v = C$, com $C \in \mathbb{R}$. Assim, mostrámos que **todas** as soluções de $u' - \lambda u = 0$ são dadas por $u(t) = e^{\lambda t}v(t) = Ce^{\lambda t}$, com $C \in \mathbb{R}$. Quanto ao o PVI para a mesma equação e condição inicial $u(0) = 0$, então $0 = u(0) = Ce^{\lambda \cdot 0} = C$, pelo que $u \equiv 0$.

Trata-se de uma equação linear do mesmo tipo que a original (de ordem $n-1$); juntando-lhe as condições iniciais $z(0) = z'(0) = \cdots = z^{(n-2)}(0) = 0$, obtemos um problema de valor inicial a que podemos aplicar o argumento anterior. Repetindo assim este argumento recursivamente ($n-1$ vezes no total, e de cada vez eliminando um dos factores de $P(D)$) obtém-se por fim o problema

$$(D - \lambda_n)z = 0, \qquad z(0) = 0,$$

de onde se conclui que $z(t) = y(t) - \tilde{y}(t) \equiv 0$, ou seja, $y(t)$ e $\tilde{y}(t)$ são iguais para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

1.3.5 Equações Vectoriais Lineares — Caso Homogéneo

Como caso particular das equações que estudámos na secção anterior, vamos agora resolver a equação vectorial de primeira ordem, no caso linea, caso homogéneo. Isto é vamos resolver a equação

$$\mathbf{Y}'(t) = A(t)\mathbf{Y}(t) \tag{1.23}$$

com $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$, $A(t) = \Big[a_{ij}(t)\Big]_{i,j=1}^{n}$, isto é uma matriz $n \times n$, cujas entradas são funções reais de variável real.

A equação vectorial pode ser escrita na forma de sistema

$$\begin{cases} y_1'(t) & = & a_{11}\, y_1(t) + ... + a_{1n}\, y_n(t) \\ \quad\vdots & \vdots & \qquad\qquad\vdots \\ y_n'(t) & = & a_{n1}\, y_1(t) + ... + a_{nn}\, y_n(t) \end{cases}$$

Usando o método de substituição, em regra geral, esta equação pode ser reduzida a uma equação de ordem n, linear, homogénea numa das componentes y_i, $i = 1, \cdots n$. Observe-se que se as funções $a_{ij}(t)$ forem constantes para todo i, $j \in \{1, \cdots, n\}$, a equação de ordem n que se obtem ao resolver o sistema é também de coeficientes constantes.

Exemplo 1:
Determinar a solução geral da equação

$$Y' = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} Y$$

Fazendo $Y = (x, y)$, a equação pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}$$

Resolvendo (por exemplo) a primeira equação em ordem a y, obtem-se

$$y = -\frac{1}{3}(x' - x)$$

pele que, substituindo na segunda equação

$$\Big(-\frac{1}{3}(x' - x)\Big)' = 3x + \Big(-\frac{1}{3}(x' - x)\Big)$$

que é uma equação de segunda ordem (linear, de coeficientes constantes, homogénea) em x. Simplificando e resolvendo

$$x'' - 2x' + 10x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - 2D + 10)x = 0$$

O polinómio característico associado $P(R) = R^2 - 2R + 10$ tem raízes complexas conjugadas $1 \pm 3i$ pelo que uma base do espaço de soluções será (por exemplo) Re$e^{(1+3i)t}$ e Im$e^{(1+3i)t}$. Tem-se então que

$$x(t) = ae^t \cos(3t) + be^t \operatorname{sen}(3t)$$

e tornando a substituir

$$y = -\frac{1}{3}\big(x' - x\big) = -be^t \cos(3t) + ae^t \operatorname{sen}(3t)$$

Finalmente, a solução da equação vectorial é dada por

$$Y(t) = e^t \begin{bmatrix} a\cos(3t) + b\operatorname{sen}(3t) \\ -b\cos(3t) + a\operatorname{sen}(3t) \end{bmatrix}$$

Exemplo 2:

Vamos agora determinar a solução geral da equação

$$Y' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} Y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y + z \\ z' = 2z \end{cases}$$

Neste caso não vamos conseguir reduzir o sistema a uma equação de ordem 3 em qualquer uma das variáveis, consequência de nas duas últimas equações não haver dependência em x e na primeira não haver depndência nas variáveis y e z. No entanto conseguiremos aplicar o método aos "sub-sistemas"

$$x' = 2x \quad \text{e} \quad \begin{cases} y' = 2y + z \\ z' = 2z \end{cases}$$

Para o primeiro

$$x' = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = c_1 e^{2t}$$

Para o outro sistema, podemos utilizar dois métodos: ou reduzir a uma equação de ordem 2 (forçosamente em y) e resolvê-lo como no exemplo anterior, ou como método alternativo que resulta sempre que a matriz associada ao sistema é triangular, e que consiste em resolver a equação em z' (dado que só depende de z) substituir na equação em y' (dado que, conhecida z só depende de y). Assim

$$z' = 2z \quad \Leftrightarrow \quad z(t) = c_2 e^{2t}$$

Substituindo na equação em y'

$$y' = 2y + c_2 e^{2t} \quad \Leftrightarrow \quad y' - 2y = c_2 e^{2t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big(e^{-2t} y\Big) = c_2 \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = e^{2t}(c_2 t + c_3)$$

e substituindo na equação em x' Finalmente, a solução da equação vectorial é dada por

$$Y(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 t + c_3 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

1.4 Equações Vectoriais de 1ª Ordem (ou Sistemas)

Sendo $I \subset \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ e, para $i = 1, ..., n,\ f_i : I \times A \to \mathbb{R}$, denomina-se por *equação diferencial vectorial* de primeira ordem um sistema de equações do tipo

$$\begin{cases} y_1'(t) &=& f_1\big(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\big) \\ &\vdots& \\ y_n'(t) &=& f_n\big(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\big) \end{cases}$$

onde as soluções são funções $y_1(t), ..., y_n(t) : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 em I. Utilizando notação vectorial, este sistema pode então ser escrito de forma abreviada como a equação vectorial

$$Y'(t) = F(t, Y(t))\,,$$

sendo

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ y_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F(t, Y(t)) = \begin{bmatrix} f_1\big(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\big) \\ . \\ . \\ . \\ f_n\big(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\big) \end{bmatrix}$$

Tal como no caso escalar ($n = 1$), sendo $t_0 \in I$, denomina-se problema de valor inicial a

$$\begin{cases} Y'(t) = F\big(t, Y(t)\big) \ \ , \ \ t \in I \\ \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

onde se supõe que $t_0 \in I$ e $Y_0 = \big(y_1(t_0), \ldots, y_n(t_0)\big) \in A$.

Função Vectorial, $F(t, Y)$, diferenciável relativamente a Y

Uma função vectorial, $F(t, Y) : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, contínua em D, diz-se *diferenciável relativamente a Y* em D, se cada uma das funções escalares $f_i(t, y_1, ..., y_n)$, $i = 1, ..., n$, tiver derivadas parciais contínuas relativamente a y_1,..., y_n em D.

Funções matriciais

No seguimento, será necessário estudar funções X cujo domínio é um intervalo real e cujo conjunto de chegada é um espaço vectorial de matrizes reais (ou complexas) de dimensão $n \times m$, que aqui denotaremos por $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ (ou $\mathbb{C}$).

Genericamente, um função $X : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, com

$$X(t) = \Big[x_{ij}(t)\Big]_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots m}}$$

pode, de facto, ser interpretada como uma função vectorial com as $n \times m$ componentes:

$$x_{11}(t), \ldots, x_{1m}(t),\ x_{21}(t), \ldots, x_{2m}(t), \ldots \quad \ldots,\ x_{n1}(t), \ldots, x_{nn}(t).$$

Sendo assim, pode-se neste contexto utilizar os conceitos e resultados já discutidos quando se estudou as funções vectoriais. A derivada de $X(t)$ é, então, dada por

$$\frac{dX}{dt} = \left[\frac{dx_{ij}}{dt}\right]_{\substack{i=1,\dots n \\ j=1\dots m}},$$

e está bem definida se as funções componentes forem diferenciáveis em I. Analogamente, o integral de X entre $t_0, t \in I$ é dado por:

$$\int_{t_0}^{t} X(s)\,ds \quad = \quad \left[\int_{t_0}^{t} x_{ij}(s)\,ds\right]_{\substack{i=1,\dots n \\ j=1\dots m}} \quad ,$$

sempre que as funções componentes sejam seccionalmente contínuas em I. Desta forma, a *linearidade* da derivada e do integral ficam asseguradas.

Relativamente à derivada do produto de duas matrizes,

$$X(t) = \left[x_{ik}(t)\right]_{\substack{i=1\dots n \\ k=1\dots m}} \qquad \text{por} \qquad Y(t) = \left[y_{kj}(t)\right]_{\substack{k=1\dots m \\ j=1\dots k}} \quad ,$$

o resultado tem que ser deduzido (porquê?). No entanto isso, é tarefa relativamente fácil: calculando a derivada da componente (i,j) de $X(t)Y(t)$, obtém-se:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{m} x_{ik}(t)y_{kj}(t) = \sum_{k=1}^{m} x'_{ik}(t)y_{kj}(t) + \sum_{k=1}^{m} x_{ik}(t)y'_{kj}(t) \quad ,$$

Resulta assim que

$$\big(X(t)Y(t)\big)' = X'(t)Y(t) + X(t)Y'(t).$$

1.4.1 Equações Vectoriais Lineares

A equação vectorial denomina-se *linear* se a função $F(t,Y)$ for linear em Y, isto é, se for da forma

$$\begin{cases} y_1'(t) &= a_{11}(t)y_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)y_n(t) + b_1(t) \\ \quad\vdots & \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_n'(t) &= a_{n1}(t)y_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)y_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

ou, na forma vectorial:

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t) \tag{1.24}$$

sendo

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \quad , \quad A(t)\begin{bmatrix} a_{11}(t)\dots a_{1n}(t) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}(t)\dots a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}.$$

Caso Homogéneo e Matriz Solução Fundamental

Fazendo $B(t) \equiv 0$ na equação (1.24), obtém-se a equação linear homogénea associada

$$Y'(t) = A(t)Y(t) \tag{1.25}$$

com $Y \in \mathbb{R}^n$ e $A(t) = \Big[a_{ij}(t)\Big]_{i,j=1}^{n}$, onde as funções $a_{ij}(t) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas.

Definição (*Matriz Solução Fundamental*)**:** Uma matriz $\mathbf{S}(t)$ denomina-se matriz solução fundamental de (1.25) se e só se

(i) $\det \mathbf{S}(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, o que significa que as colunas de $\mathbf{S}(t)$ são linearmente independentes ($\mathbf{S}(t)$ é não singular) para qualquer $t \in I$;

(ii) as colunas de $\mathbf{S}(t)$ são soluções da equação $Y'(t) = A(t)Y(t)$.

Exemplo:
No Exemplo 1 da Secção 2.4.1, resolvemos a equação vectorial

$$Y' = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} Y \tag{1.26}$$

tendo obtido como solução

$$Y(t) = e^t \begin{bmatrix} a\cos(3t) + b\,\mathrm{sen}(3t) \\ -b\cos(3t) + a\,\mathrm{sen}(3t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos(3t) & \mathrm{sen}(3t) \\ \mathrm{sen}(3t) & -\cos(3t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S}(t)C,$$

É agora fácil de verificar que a matriz $S(t)$ acima definida é uma matriz solução fundamental associada à equação (1.26). De facto

(i) A matriz $\mathbf{S}(t)$ é não singular em $\mathbb{R}$, pois

$$\det \mathbf{S}(t) = -1 \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(ii) Verifica-se que $Y_i'(t) = AY_i(t)$, $i = 1, 2$ em que $Y_i(t)$ representa a coluna i de $\mathbf{S}(t)$. De facto, para $i = 1$

$$Y_1'(t) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e^t\cos(3t) \\ e^t\,\mathrm{sen}(3t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t(\cos(3t) - 3\,\mathrm{sen}(3t)) \\ e^t(\mathrm{sen}(3t) + 3\cos(3t)) \end{bmatrix}$$

e

$$AY_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t\cos(3t) \\ e^t\,\mathrm{sen}(3t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t(\cos(3t) - 3\,\mathrm{sen}(3t)) \\ e^t(\mathrm{sen}(3t) + 3\cos(3t)) \end{bmatrix}$$

enquanto que para $i = 2$

$$Y_2'(t) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e^t\,\mathrm{sen}(3t) \\ -e^t\cos(3t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t(3\cos(3t) + \mathrm{sen}(3t)) \\ e^t(3\,\mathrm{sen}(3t) - \cos(3t) \end{bmatrix}$$

e

$$AY_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t\,\mathrm{sen}(3t) \\ -e^t\cos(3t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t(\mathrm{sen}(3t) + 3\cos(3t)) \\ e^t(3\,\mathrm{sen}(3t) - \cos(3t)) \end{bmatrix}$$

Observe-se que não há uma única matriz solução fundamental da equação — por exemplo, se $\mathbf{S}(t)$ é uma matriz solução fundamental qualquer matriz obtida por troca de colunas de $\mathbf{S}(t)$ é tambem uma matriz solução fundamental.

Exemplo: No problema anterior, a solução também pode ser escrita na forma:

$$Y(t) = e^t \begin{bmatrix} a\cos(3t) + b\,\mathrm{sen}(3t) \\ -b\cos(3t) + a\,\mathrm{sen}(3t) \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \mathrm{sen}(3t) & \cos(3t) \\ -\cos(3t) & \mathrm{sen}(3t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathbf{S}_1(t)C$$

pelo que $\mathbf{S}_1(t)$ é tambem uma matriz solução fundamental. (A verificação é óbvia).

Proposição (*Caracterização da Matriz Solução Fundamental*): $\mathbf{S}(t)$ é uma matriz solução fundamental da equação (1.25) se e só se:

(i) Existe um $t_0 \in I$ tal que $S(t_0)$ é não singular.

(ii) **S**'(t) = A(t) **S**(t)

Demonstração: (ii) é apenas outra forma de escrever a alínea (ii) da definição de $\mathbf{S(t)}$. Quanto a (i), suponhamos que existe um $\hat{t} \in I$ tal que $\mathbf{S}(\hat{t})$ é singular, isto é, para certo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}} \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{S}(\hat{t})\mathbf{b} = \mathbf{0}$, e derivemos uma contradição. Como

$$\mathbf{S}'(t)\mathbf{b} = \mathbf{A(t)S(t)bfb};,$$

Considerando $Y(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{b}$ então das equações anteriores:

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y \\ Y(\hat{t}) = \mathbf{S}(\hat{t})\mathbf{b} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Por unicidade de solução deste PVI, $Y(t) \equiv 0$. Conclui-se então que $\mathbf{S}(t)\mathbf{b} = \mathbf{0}$ para todo o $t \in I$, pelo que $\mathbf{S}(t)$ é singular para todo o $t \in I$; logo, em particular, também $\mathbf{S}(t_0)$ é singular, o que contradiz a hipótese. □

Como corolário da proposição anterior, obtemos:

Teorema (Matriz Solução Fundamental): $\mathbf{S}(t)$ é uma matriz solução fundamental da equação (1.25) se e só se é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{S}' = \mathbf{AS} \\ \mathbf{S(0)} = \mathbf{S_0} \end{cases}$$

para alguma matriz não singular, $S_0 \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Exemplo: Para obter uma matriz solução fundamental, $\mathbf{S}(t)$, da equação $Y' = A(t)Y$, podemos resolver os n problemas

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y \\ Y(t_0) = \mathbf{e}_i \end{cases} \qquad \text{com} \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$

onde $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_n$ são os vectores da base canónica de $\mathbb{R}^n$. As colunas de $\mathbf{S}(t)$ serão as soluções desses n problemas.

Resulta da definição que a matriz $\mathbf{S(t)}$ é invertível para todo o t. Sendo assim

$$0 = \frac{d}{dt}\Big(\mathbf{S(t)}\,\mathbf{S^{-1}(t)}\Big) = \mathbf{S'(t)}\,\mathbf{S^{-1}(t)} + \mathbf{S(t)}\,\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\Big(\mathbf{S^{-1}(t)}\Big),$$

pelo que $\mathbf{S(t)}\,\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\big(\mathbf{S^{-1}(t)}\big) = -\mathbf{S'(t)}\,\mathbf{S^{-1}(t)}$. Desta forma:

$$\frac{d}{dt}\Big(\mathbf{S^{-1}(t)}\Big) = -\mathbf{S^{-1}(t)S'(t)\,S^{-1}(t)}$$

Atendendo a que $\mathbf{S'(t) = A(t)S(t)}$ implica $A(t) = \mathbf{S'(t)S^{-1}(t)}$, então a inversa da matriz solução fundamental verifica:

$$\frac{d}{dt}\Big(\mathbf{S^{-1}(t)}\Big) = -\mathbf{S^{-1}(t)A(t)} \tag{1.27}$$

Caracterização das Soluções da Equação Homogénea

Teorema: Considere-se $I \subset \mathbb{R}$ e $A(t) = \Big[a_{ij}(t)\Big]_{i,j=1}^{n}$, com $a_{ij}(t) : I \to \mathbb{R}$ contínuas, e o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} Y'(t) = A(t)Y(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases} \tag{1.28}$$

onde $t_0 \in I$ e $Y_0 \in \mathbb{R}^n$. Seja $\mathbf{S(t)}$ uma matriz solução fundamental da equação diferencial. Então o problema (1.28) tem uma única solução dada por $Y(t) = \mathbf{S(t)S^{-1}(t_0)Y_0}$. Além disso, as soluções da equação diferencial formam um espaço vectorial de dimensão n, sendo uma sua base constituida pelas colunas de $S(t)$; ou seja, a sua solução geral é:

$$Y(t) = \mathbf{S(t)C} \qquad \text{com} \qquad \mathbf{C = (c_1, ..., c_n)} \in \mathbb{R}^\mathbf{n}$$

Demonstração: Seja $Y(t)$ uma solução arbitrária da equação $Y' = A(t)Y$ e considere-se $\mathbf{z}(t) = S^{-1}(t)Y(t)$. Queremos mostrar que $\mathbf{z}(t)$ é constante. Então, usando a equação (1.27):

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'(t) &= \big(\mathbf{S^{-1}(t)}\big)' Y(t) + \mathbf{S^{-1}(t)Y'(t)} \\ &= -\mathbf{S^{-1}(t)A(t)Y(t)} + \mathbf{S^{-1}(t)Y'(t)} \\ &= \mathbf{S^{-1}(t)}\Big(\mathbf{Y'(t) - A(t)Y(t)}\Big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Temos então que $S^{-1}(t)Y(t) = z(t) = C$, com $C \in \mathbb{R}^n$, o que nos permite concluir que:

(1) a solução geral da equação diferencial é $Y(t) = S(t)C$;

(2) se $Y(t_0) = Y_0$ então $C = S^{-1}(t_0)Y(t_0) = S^{-1}(t_0)Y_0$, pelo que a solução do PVI (1.28) é $Y(t) = \mathbf{S(t)S^{-1}(t_0)Y_0}$.

$\square$

1.4.2 Equações vectoriais Lineares — Caso Não Homogéneo

Dada uma matriz solução fundamental de $Y' = A(t)Y$, pretendemos obter as soluções da equação não homogénea $Y' = A(t)Y + B(t)$

Teorema (Fórmula de Variação das Constantes): Sendo $A = \left[a_{ij(t)}\right]_{i,j=1}^{n}$, com componentes $a_{ij} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas, $\mathbf{b} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ também contínua, $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ e $S(t)$ uma matriz solução fundamental de $Y' = A(t)Y$, então a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y + \mathbf{b}(t) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases} \tag{1.29}$$

é dada pela *fórmula de variação das constantes*:

$$Y(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}^{-1}(t_0)Y_0 + \mathbf{S}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{S}^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds \tag{1.30}$$

Demonstração: Escrevendo a equação diferencial (1.29) na forma $Y' - A(t)Y = \mathbf{b}(t)$, e multiplicando ambos os membros por $S^{-1}(t)$, obtém-se:

$$S^{-1}(t)Y' - S^{-1}(t)A(t)Y = S^{-1}(t)\mathbf{b}(t)$$

Atendendo a que $\left(S^{-1}(t)\right)' = -S^{-1}(t)A(t)$ (equação (1.27)), resulta pois que

$$S^{-1}(t)\,Y' + \left(S^{-1}(t)\right)'(t)\,Y = S^{-1}(t)\mathbf{b}(t),$$

ou seja

$$\frac{d}{dt}\Big(S^{-1}(t)Y(t)\Big) = S^{-1}(t)\mathbf{b}(t) \tag{1.31}$$

Integrando entre t_0 e t, e considerando que $Y(t_0) = y_0$, temos que:

$$S^{-1}(t)Y(t) - S^{-1}(t_0)Y_0 = \int_{t_0}^{t} S^{-1}(s)\mathbf{b}(s)\,ds$$

Multiplicando agora à direita por $S(t)$ obtém-se:

$$Y(t) - S(t)S^{-1}(t_0)Y_0 = S(t)\int_{t_0}^{t} S^{-1}(s)\mathbf{b}(s)\,ds.$$

□

Corolário (Fórmula de Variação das Constantes para a Solução Geral): Nas mesmas condições do teorema anterior, a solução geral da equação

$$Y' = A(t)Y + \mathbf{b}(t)$$

é dada por:

$$Y(t) = \mathbf{S}(t)C + \mathbf{S}(t)\int^{t} \mathbf{S}^{-1}(s)\mathbf{b}(s)\,ds \quad , \quad C \in \mathbb{R}^n; \tag{1.32}$$

(onde $\int^{t} \mathbf{x}(s)ds$ representa <u>uma</u> primitiva da função vectorial $\mathbf{x}(t)$).

Demonstração: Repita a prova do teorema anterior, primitivando ambos os membros da igualdade (1.31) em vez de os integrar entre t_0 e t (exercício). Note que a constante de primitivação, C, pertence a $\mathbb{R}^n$. □

Exemplo:
Determine a solução da equação

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} t & 1 \\ -t^2 & -t \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

Começemos por determinar uma matriz solução fundamental, resolvendo o sistema homogéneo associado

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} t & 1 \\ -t^2 & -t \end{bmatrix} Y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = tx + y \\ y' = -t^2x - ty \end{cases}$$

onde $Y = (x, y)$. Pela primeira equação $y = x' - tx$, pelo que substituindo na segunda equação

$$\Big(x' - tx\Big)' = -t^2x - t\Big(x' - tx\Big) \quad \Leftrightarrow \quad x'' - tx' - x = -t^2x - tx' + t^2x \quad \Leftrightarrow \quad x'' - x = 0$$

Fazendo $Dx = x'$ esta última equação pode ser escrita na forma $(D^2 - 1)x = 0$ e então é fácil de concluir que

$$x(t) = ae^t + be^{-t}$$

e consequentemente

$$y = x' - tx = ae^t - be^{-t} - ate^t - bte^{-t}$$

Obtem-se a solução (da equação homogénea

$$Y_H(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^t + be^{-t} \\ ae^t - be^{-t} - ate^t - bte^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t - te^t & -e^{-t} - te^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

E a matriz

$$S(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t - te^t & -e^{-t} - te^{-t} \end{bmatrix}$$

é uma matriz solução fundamental. Podemos então aplicar a fórmula da variação das constantes para obter a solução da equação (1.33)

$$\begin{aligned}
Y(t) &= S(t)C + S(t) \int S^{-1}(t)B(t)dt \\
&= S(t) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + S(t) \int \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t}(1+t) & e^{-t} \\ e^t(1+t) & -e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= S(t) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \frac{1}{2} S(t) \begin{bmatrix} \int e^{-t}dt \\ -\int e^t dt \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t - te^t & -e^{-t} - te^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t - te^t & -e^{-t} - te^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ -e^t \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ae^t + be^{-t} - 1 \\ a(1+t)e^t + b(-1-t)e^{-t} + t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

1.4.3 Equações Vectoriais Lineares de Coeficientes Constantes:

A equação vectorial linear denomina-se *de coeficientes constantes* se a matriz $A(t)$ tiver entradas constantes, isto é, se for da forma

$$\begin{cases} y_1'(t) &= & a_{11}\, y_1(t) + \ldots + a_{1n}\, y_n(t) + b_1(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n'(t) &= & a_{n1}\, y_1(t) + \ldots + a_{nn}\, y_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

ou, na forma vectorial,

$$Y'(t) = AY(t) + B(t), \tag{1.34}$$

sendo

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \quad , \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

Caso Homogéneo

Tal como anteriormente, o caso homogéneo corresponde a tomar $B(t) \equiv 0$ na equação (1.34). Vamos assim estudar a equação

$$Y'(t) = AY(t) \tag{1.35}$$

onde $t \in \mathbb{R}$, $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ e $A = \left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}$ com $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Exponencial de uma Matriz

Dados uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, convenciona-se que:

$$A^0 \overset{\text{def}}{=} I,$$

onde I representa a matriz identidade de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Recordamos o problema de valor inicial escalar,

$$\begin{cases} y' = ay \\ y(0) = 1 \end{cases} ,$$

tem por única solução $y(t) = e^{at}$. Procedendo por analogia, definimos a exponencial de tA, que denotamos por e^{tA}, da forma que se segue.

Definição (Exponencial de uma Matriz): Seja $t \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então e^{At} é a (única) matriz solução fundamental de (1.35) que é igual à matriz identidade em $t = 0$. Isto equivale a dizer que $X(t) = e^{At}$ é a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = I \end{cases} \tag{1.36}$$

Resulta imediatamente da definição anterior que:

Proposição: Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e S é uma matriz solução fundamental de $Y' = AY$ então:

$$e^{tA} = S(t)S^{-1}(0)$$

Exemplo 3:

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, pretendemos calcular e^{At} para $t \in \mathbb{R}$. Revisitando o Exemplo 1 da secção 2,4.1 (resolução da equação diferencial (1.26)), e concluimos num exemplo posterior que uma matriz solução fundamental é

$$S(t) = e^t \begin{bmatrix} \cos(3t) & \operatorname{sen}(3t) \\ \operatorname{sen}(3t) & -\cos(3t) \end{bmatrix}$$

No entanto, e dado que $S(0) \neq Id_2$, $S(t)$ não é e^At. Mas pela proposção anterior

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = e^t \begin{bmatrix} \cos(3t) & \operatorname{sen}(3t) \\ \operatorname{sen}(3t) & -\cos(3t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = e^t \begin{bmatrix} \cos(3t) & -\operatorname{sen}(3t) \\ \operatorname{sen}(3t) & \cos(3t) \end{bmatrix}$$

Note que a exponencial da matriz tA, $\mathbf{X}(t)$, tem uma propriedade importante — é a *única matriz solução fundamental que verifica* $\mathbf{X}(0) = I$.

Para obter soluções linearmente de $Y' = AY$, podemos usar o seguinte resultado.

Proposição: Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um valor próprio de A e $V \in \mathbb{C}^n$ um vector próprio associado a λ então $Y(t) = e^{t\lambda}V$ é uma solução da equação $Y' = AY$. Além disso, $\mathbf{u} = \operatorname{Re} Y$ e $V = \operatorname{Im} Y$ são soluções reais de $Y' = Y$.

Demonstração: Para provar a primeira parte, basta ver que:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{d}{dt}\big(e^{\lambda t}V\big) = e^{\lambda t}\,\lambda \mathbf{v} = e^{\lambda t}AV = A\big(e^{t\lambda}V\big) = AY(t).$$

Tendo em conta que

$$(\mathbf{u} + \mathrm{i}\mathbf{v})' = \mathbf{u}' + \mathrm{i}\mathbf{v}' = A\mathbf{u} + \mathrm{i}A\mathbf{v} = A\mathbf{u} + iA\mathbf{v},$$

tomando a parte real e parte imaginária em ambos os membros desta igualdade obtém-se $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}' = A\mathbf{v}$. □

Se A for uma matriz $n \times n$ real diagonalizável, então existe um conjunto de n vectores próprios de A linearmente independentes $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ forem os respectivos valores próprios associados, podemos construir uma matriz solução fundamental — e daí obter e^{At} — colocando nas colunas de S as soluções de $Y' = Ay$ dadas pela proposição anterior; isto é:

$$e^{\lambda_1 t}V_1, e^{\lambda_2 t}V_2, \ldots, e^{\lambda_n t}V_n.$$

Note que $S(0)$ é não singular.

Se λ for um valor próprio complexo de uma matriz real A, com vector próprio associado $V \in \mathbb{C}^n$, então o procedimento anterior dá-nos uma matriz solução fundamental complexa; no entanto, podemos utilizar as funções reais $\operatorname{Re} e^{\lambda t}V$ e $\operatorname{Im} e^{\lambda t}V$, no lugar de $e^{\lambda_1 t}V$ e $e^{\bar{\lambda}_1 t}\overline{V}$ [8]

[8] Se A é uma matriz real, então $\bar{A} = A$. Se (λ, V) é um par valor próprio, vector próprio (complexo) de A,

Série da Exponencial de uma Matriz

Para encontrar um desenvolvimento em série para a exponencial de At, procuremos uma solução da equação (1.36) através das iteradas de Picard:

$$\begin{aligned} X_0(t) &= I \\ X_{n+1}(t) &= I + \int_{t_0}^{t} AX_n(s)\,ds \qquad \text{para} \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Calculando as primeiras 3 iterações, obtém-se:

$$\begin{aligned} X_0(t) &= I \\ X_1(t) &= I + \int_{t_0}^{t} A\,ds \;=\; I + tA \\ X_2(t) &= I + \int_{t_0}^{t} (A + sA^2)\,ds \;=\; I + \int_{t_0}^{t} A\,ds + \int_{t_0}^{t} sA^2\,ds \;=\; I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 \\ X_3(t) &= I + \int_{t_0}^{t} \left(A + sA^2 + \frac{s^2}{2}A^3\right) ds = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^2}{3!}A^3 \end{aligned}$$

Resulta então que[9]:

$$X_n(t) = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n$$

Isto sugere que a forma da solução de (1.36) é o "limite" da expressão anterior, ou seja:

$$X(t) = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tA)^n\,.$$

Esta fórmula é análoga à que define a série de McLaurin da função exponencial, $e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!}$, para $a, t \in \mathbb{R}$. No nosso caso trata-se de uma série de potências de matrizes onde, em cada termo, aparece tA no lugar de ta. Isto leva-nos a conjecturar o seguinte:

Teorema (Série da Exponencial de uma Matriz): Sendo A uma matriz $n \times n$ de componentes reais e $t \in \mathbb{R}$, a exponencial de tA, e^{tA}, é dada por:

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots \tag{1.37}$$

Além disso, a série (1.37) converge uniformemente para t em intervalos do tipo $[-R, R]$ (para qualquer $R > 0$) e verifica $Ae^{At} = e^{At}A$, para todo o $t \in \mathbb{R}$.

então $(\bar{\lambda}, \bar{V})$ é também um par valor próprio, vector próprio de A, pois $A\overline{V} = \bar{A}\overline{V} = \overline{AV} = \overline{\lambda V} = \bar{\lambda}\bar{V}$. Neste caso, $\mathrm{Re}\; e^{\bar{\lambda}t}\overline{V} = \mathrm{Re}\; e^{\lambda t}V$ e $\mathrm{Im}\; e^{\bar{\lambda}t}\overline{V} = -\; \mathrm{Im}\, e^{\lambda t}V$. Por cada par de vectores próprios conjugados, V e $\overline{V}$, produzem-se desta forma duas (não quatro!) funções reais linearmente indendentes, $\mathrm{Re}\, e^{\lambda t}V$ e $\mathrm{Im}\, e^{\lambda t}V$.

[9] Pode-se facilmente provar este resultado por indução. No entanto, neste contexto isso será desnecessário, pois estamos apenas a usar as iteradas de Picard para formular uma conjectura cuja veracidade será depois comprovada por outro método.

Demonstração: Para provar este teorema, precisaremos em primeiro lugar de saber produzir estimativas de matrizes. Sendo $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$, consideramos:

$$\|A\| = n \max_{i,j=1,\ldots,n} |a_{ij}| \,.$$

Note que qualquer componente a_{ij} de A verifica:

$$|a_{ij}| \leq \frac{1}{n}\,\|A\|. \tag{1.38}$$

De facto, esta função tem as propriedades de uma norma [10]; mas vamos aqui apenas provar a propriedade de $\|A\|$ de que efectivamente precisamos.

Se $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ é outra matriz real, então as componentes do produto AB verificam:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\,|b_{ik}| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}\|A\|\|B\| = \frac{1}{n}\|A\|\|B\|$$

Ou seja, o módulo de cada componente de AB é majorado pelo mesmo valor: $\frac{1}{n}\,\|A\|\|B\|$. Desta forma:

$$\|AB\| \leq n\left(\frac{1}{n}\|A\|\|B\|\right) = \|A\|\|B\|$$

Pela desigualdade anterior, $\|A^k\| \leq \|A\|\|A^{k-1}\| \leq \|A\|^2\|A^{k-2}\| \leq \cdots \leq \|A\|^k$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$. Como também $\|A^0\| = \|I\| = 1 = \|A\|^0$, resulta pois que:

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k \qquad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.39}$$

Passamos agora à demonstração da convergência da série. Para tal, basta provar que todas as componentes da soma da série (1.37) existem (em $\mathbb{R}$).

Sendo $\delta_{ii} = 1$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$, e denotando cada componente (i,j) de A^k por $a_{ij}^{(k)}$, então as componentes de e^{At} são as somas das séries reais [11]:

$$\delta_{ij} + ta_{i,j} + \frac{t^2}{2!}a_{ij}^{(2)} + \cdots + \frac{t^k}{k!}a_{ij}^{(k)} + \cdots \; = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}a_{ij}^{(k)} \qquad \text{com} \quad i,j = 1, 2, \ldots n. \tag{1.40}$$

Vamos agora provar a convergência uniforme destas séries, para t num intervalo do tipo $[-R, R]$, com $R > 0$. Para $|t| \leq R$, e usando (1.38) e (1.39), podemos majorar cada um dos termos das séries anteriores como se segue:

$$\left|\frac{t^k}{k!}a_{ij}^{(k)}\right| = \frac{|t|^k}{k!}\left|a_{ij}^{(k)}\right| \leq \frac{R^k}{k!}\left|a_{ij}^{(k)}\right| \leq \frac{R^k}{k!}\frac{\|A^k\|}{n} \leq \frac{R^k}{k!}\frac{\|A\|^k}{n} = \frac{\left(\|A\|R\right)^k}{n\,k!}$$

Como a série real

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\|A\|R\right)^k}{k!}$$

[10] É fácil provar que para quaisquer duas matrizes reais, A, B, de dimensão $n \times n$, se tem: **(a)** $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$; **(b)** $\|cA\| = |c|\,\|A\|$, para $c \in \mathbb{R}$; **(c)** $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$; **(d)** $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

[11] O símbolo δ_{ij}, designado na literatura por delta de Kronecker, representa as componentes da matriz identidade. Note que $a_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$.

é convergente — a sua soma é $\frac{1}{n}e^{\|A\|R}$ — então, pelo critério de Weierstrass, as séries (1.40) convergem uniformemente para t em intervalos do tipo $[-R, R]$; isto vale para qualquer $R > 0$. Em particular, as séries (1.40) convergem pontualmente para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Isto prova que e^{tA} está bem definida por (1.37), é diferenciável em $\mathbb{R}$ e pode ser derivada termo a termo.

Usando o resultado anterior, podemos agora calcular a derivada de e^{tA}:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{tA} &= \frac{d}{dt}\left(I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots\right) \\
&= 0 + A + \frac{2t}{2!}A^2 + \frac{3t^2}{3!}A^3 + \cdots + \frac{nt^{n-1}}{n!}A^n + \cdots \\
&= A\left(I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots\right) \quad = \quad A\,e^{tA} \\
&= \left(I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots\right)A \quad = \quad e^{tA}\,A
\end{aligned}$$

Assim sendo:

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = A\,e^{tA} = e^{tA}\,A$$

Note também que $e^{0A} = I$. Isto conclui a demonstração do teorema. □

Algumas propriedades de e^{At}

Dado $t \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{M}^n_{i,j=1}(\mathbb{R})$, listamos aqui algumas das propriedades de e^{At}:

(a) $e^{\mathbf{0}}$ é a matriz identidade em $\mathbb{R}^n$;

(b) $S(t) = e^{At}$ é a única matriz solução fundamental de $Y' = AY$ que verifica $S(0) = I$.

(c) e^{At} é uma função diferenciável em qualquer $t \in \mathbb{R}$ e:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = Ae^{At} = e^{At}A$$

(d) A matriz e^{At} é invertível para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e

$$\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}$$

(e) Se A, B são quaisquer matrizes $n \times n$ verificando $AB = BA$, então:

$$e^{At}B = Be^{At}$$

(f) Se A, B são quaisquer matrizes $n \times n$ verificando $AB = BA$, então:

$$e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$$

Demonstração:

(d) Atendendo a que:

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{At}\,e^{-At}\Big) = e^{At}Ae^{-At} + e^{At}(-A)e^{-At} = e^{At}Ae^{-At} - e^{At}Ae^{-At} = 0,$$

então $e^{At}\,e^{-At}$ é constante. Em particular:

$$e^{At}\,e^{-At} = e^{A\,0}\,e^{-A\,0} = I^2 = I.$$

(e) (Exercício)

(f) Considere $X(t) = e^{At}e^{Bt}$. Então $X(0) = I$ e (usando **(e)**):

$$X'(t) = Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt} = Ae^{At}e^{Bt} + Be^{At}e^{Bt} = (A+B)e^{At}e^{Bt} = (A+B)X(t).$$

Isto prova que $X(t) = e^{(A+B)t}$. □

Como consequência da teoria desenvolvida para o caso geral em que $A(t)$ é uma função matricial e as propriedades de e^{At} podemos deduzir o seguinte:

Teorema (Solução de uma equação vectorial linear de coeficientes constantes)

— **Caso Homogéneo**

Se $A = [a_{i,j}]$ é uma matriz $n \times n$, com $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{Y} = AY \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

tem solução única, dada por:

$$Y(t) = e^{A(t-t_0)}Y_0 \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Além disso, as soluções da equação $Y' = AY$ formam um espaço vectorial de dimensão n, sendo dadas por $Y(t) = e^{At}C$, onde $C \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo:

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

vamos determinar a matriz e^{At} e a solução do (PVI)

$$\begin{cases} x' = 2x + 4y \\ y' = -x - 2y \\ z' = x + 2y \end{cases} \qquad , \qquad (x(0), y(0), z(0)) = (1, 1, 1)$$

Começemos por determinar uma matriz solução fundamental associada ao sistema (homogéneo). Assim

$$x' = 2x + 4y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x' - 2x}{4}$$

Substituindo na segunda equação, obtemos

$$y' = -x - 2y \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x' - 2x}{4}\right)' = -x - 2\left(\frac{x' - 2x}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad x'' = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = c_1 + c_2 t$$

Assim

$$y(t) = \frac{x' - 2x}{4} = \frac{c_2 - 2c_1 - 2c_1 t}{4} \quad \text{e} \quad z = \int (x + 2y) dt = \frac{c_2 t}{2} + c_3$$

Então

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 t \\ \frac{c_2 - 2c_1 - 2c_1 t}{4} \\ \frac{c_2 t}{2} + c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} - \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

A matriz

$$S(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} - \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz solução fundamental associada ao sistema mas não é e^{At} (dado que para $t = 0$ não iguala a matriz identidade. Tem-se que

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} - \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 + 2t & 4t & 0 \\ -t & 1 - 2t & 0 \\ t & 2t & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, a solução do (PVI) é dada por

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2t & 4t & 0 \\ -t & 1 - 2t & 0 \\ t & 2t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 6t \\ 1 - 3t \\ 1 + 3t \end{bmatrix}$$

— **Caso Não Homogéneo** Se à equação

$$Y'(t) = AY(t) + \mathbf{b}(\mathbf{t}) \tag{1.41}$$

com $Y \in \mathbb{R}^n$, $A = \left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{b} : \mathbf{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$. aplicarmos a fórmula (1.32), concluímos que a solução geral da equação (1.41) é dada por

$$Y(t) = e^{At}C + e^{At} \int^t e^{-As}\, \mathbf{b}(s)\, ds \quad , \quad C \in \mathbb{R}^n$$

Se adicionalmente for dada a condição inicial $Y(t_0) = Y_0$, a solução do PVI será neste caso dada por

$$Y(t) = e^{A(t-t_0)} Y_0 + e^{At} \int_{t_0}^{t} e^{-As}\, \mathbf{b}(s)\, ds$$

para todo $t \in I$.

Exemplo:
Determinar a solução do PVI

$$Y' = AY + \mathbf{b}(t) \quad , \quad Y(0) = (1. - 1.0)$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Vamos em primeiro lugar determinar a matriz e^{At} resolvenso o sistema homogéneo associado, isto é determinar a soluçãp geral de

$$\begin{cases} x' = -2x + z \\ y' = -3y - z \\ z' = y - z \end{cases}$$

Para tal, determinemos a solução do sistema em y e z, e conhecidas estas funções determinaremos a função x resolvendo a equação correspondente. Assim

$$\begin{cases} y' = -3y - z \\ z' = y - z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Big(z' + z\Big)' = -3\Big(z' + z\Big) - z \\ y = z' + z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z'' + 4z' + 4z = 0 \\ y = z' + z \end{cases}$$

O polinómio característico associado à equação (em z) é

$$P(R) = R^2 + 4R + 4 = (R+2)^2$$

pelo que $z(t) = ae^{-2t} + bte^{-2t}$ e consequentemente

$$y = z' + z = (-a + b)e^{-2t} - bte^{-2t}$$

Finalmente, substituindo na equação em x

$$x' + 2x = ae^{-2t} + bte^{-2t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big(e^{2t}x\Big) = a + bt \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-2t}\Big(c + at + b\frac{t^2}{2}\Big)$$

Tem-se então que a solução do sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_H = e^{-2t} \begin{bmatrix} c + at + b\frac{t^2}{2} \\ -a + b - bt \\ a + bt \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} t & \frac{t^2}{2} & 1 \\ -1 & 1-t & 0 \\ 1 & t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \equiv S(t)C$$

e $S(t)$ é uma matriz solução fundamental. Então

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1-t & -t \\ 0 & t & 1+t \end{bmatrix}$$

Assim, a solução da equação é dada pela fórmula da variação das constantes (versão com a exponencial da matriz A)

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} &= e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{At} \int_0^t e^{-As} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2e^{-2s} \end{bmatrix} ds \\
&= e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{At} \int_0^t e^{2s} \begin{bmatrix} 1 & \frac{s^2}{2} & -s + \frac{s^2}{2} \\ 0 & 1+s & s \\ 0 & -s & 1-s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2e^{-2s} \end{bmatrix} ds \\
&= e^{-2t} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{2t}-1) + 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \\ -1 + t - t^2 \\ t + t^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

1.4.4 Cálculo de uma Matriz Solução Fundamental no caso A diagonalizável

Uma matriz A, $n \times n$, diz-se *diagonalizável* se admite n vectores linearmente independentes. Observa-se que, se a matriz A admitir n valores próprios distintos então A é necessariamente diagonalizável. Se A admite valores próprios repetidos (com multiplicidade algébrica, m_a, maior do que 1), a matriz será diagonalizável se a multiplicidade geométrica, m_g, for igual a m_a, e não será diagonalizável se a multiplicidade geométrica, m_g, for menor do que m_a.

No caso em que a matriz é diagonalizável, podemos obter soluções linearmente independentes de $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y}$ usando o seguinte resultado.

Proposição: Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um valor próprio de A e $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ um vector próprio associado a λ então $Y(t) = e^{t\lambda}\mathbf{v}$ é uma solução da equação $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Além disso, $\mathbf{u} = \operatorname{Re}\mathbf{y}$ e $\hat{\mathbf{u}} = \operatorname{Im}\mathbf{y}$ são soluções reais de $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$.

Demonstração: Para provar a primeira parte, basta ver que:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \frac{d}{dt}\big(e^{\lambda t}\mathbf{v}\big) = e^{\lambda t}\,\lambda\mathbf{v} = e^{\lambda t}A\mathbf{v} = A\big(e^{t\lambda}\mathbf{v}\big) = A\mathbf{y}(t).$$

Tendo em conta que

$$\mathbf{u}' + \mathrm{i}\hat{\mathbf{u}}' = (\mathbf{u} + \mathrm{i}\hat{\mathbf{u}})' = \mathbf{y}' = A\mathbf{y} = A(\mathbf{u} + \mathrm{i}\hat{\mathbf{u}}) = A\mathbf{u} + \mathrm{i}A\hat{\mathbf{u}},$$

tomando a parte real e a parte imaginária de ambos os membros desta igualdade obtém-se $\mathbf{u}' = A\mathbf{u}$ e $\hat{\mathbf{u}}' = A\hat{\mathbf{u}}$. □

Se A for uma matriz $n \times n$ real diagonalizável, então existe um conjunto de n vectores próprios de A linearmente independentes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ forem os respectivos valores próprios associados, podemos construir uma matriz solução fundamental — e daí obter e^{At} — colocando nas colunas de $\mathbf{S}$ as soluções de $\mathbf{y}' = Ay$ dadas pela proposição anterior; isto é:

$$e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1, e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2, \ldots, e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n.$$

Note que $\mathbf{S}(0)$ é não singular. Se λ for um valor próprio complexo de uma matriz real A, com vector próprio associado $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, então o procedimento anterior dá-nos uma matriz solução fundamental complexa; no entanto, podemos utilizar as funções reais $\mathrm{Re}\, e^{\lambda t}\mathbf{v}$ e $\mathrm{Im}\, e^{\lambda t}\mathbf{v}$, no lugar de $e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}$ e $e^{\bar{\lambda}_1 t}\bar{\mathbf{v}}$ [12]

Exemplo 1:
Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vamos calcular uma (MSF) associada a $Y' = AY$ começando por calcular os valores próprios de A:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \;\Leftrightarrow\; (3-\lambda)(-1-\lambda) - 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 4 \;\vee\; \lambda = -2$$

Conclui-se de imediato que a matriz A é diagonalizável. Como tal vamos calcular os vectores própios associados.

- $\lambda = 4$, o vector próprio associado é uma solução não nula de

$$(A - 4I)v = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow\; v_1 - 5v_2 = 0$$

  Então podemos escolher (por exemplo) $v_2 = 1$) e o vector próprio associado a 4 será $\mathbf{v} = (5, 1)$.

- $\lambda = -2$, o vector próprio associado é uma solução não nula de

$$(A + 2I)v = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow\; v_1 + v_2 = 0$$

  Então podemos escolher (por exemplo) $v_2 = 1$) e o vector próprio associado a 4 será $\mathbf{w} = (-1, 1)$.

Como tal, a matriz

$$S(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} & e^{4t}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

é uma (MSF) associada à equação $Y' = AY$. Dado que

$$S(0) = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

não é a matriz identidade, tem-se que

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = \frac{-1}{6}\begin{bmatrix} -e^{-2t} & 5e^{4t} \\ e^{-2t} & e^{4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

[12] Se A é uma matriz real, então $\bar{A} = A$. Se $(\lambda, \mathbf{v})$ é um par valor próprio, vector próprio (complexo) de A, então $(\bar{\lambda}, \bar{\mathbf{v}})$ é também um par valor próprio, vector próprio de A, pois $A\bar{\mathbf{v}} = \bar{A}\bar{\mathbf{v}} = \overline{A\mathbf{v}} = \overline{\lambda\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}$. Neste caso, $\mathrm{Re}\; e^{\bar{\lambda}t}\bar{\mathbf{v}} = \mathrm{Re}\; e^{\lambda t}\mathbf{v}$ e $\mathrm{Im}\; e^{\bar{\lambda}t}\bar{\mathbf{v}} = -\,\mathrm{Im}\; e^{\lambda t}\mathbf{v}$. Por cada par de vectores próprios conjugados, $\mathbf{v}$ e $\bar{\mathbf{v}}$, produzem-se desta forma duas (não quatro!) funções reais linearmente independentes, $\mathrm{Re}\; e^{\lambda t}\mathbf{v}$ e $\mathrm{Im}\; e^{\lambda t}\mathbf{v}$.

isto é

$$e^{At} = \frac{-1}{6}\begin{bmatrix} -e^{-2t} - 5e^{4t} & 5e^{-2t} - 5e^{4t} \\ e^{-2t} - e^{4t} & -5e^{-2t} - e^{4t} \end{bmatrix}$$

É importante calcular as soluções do problema de valor inicial

$$Y' = AY \quad , \quad Y(0) = Y_0 \tag{1.42}$$

para alguns valores especiais de $Y_0 \in \mathbb{R}^2$. Começemos por analisar a solução de (1.42) quando $Y_0 = (0,0)$. Neste caso, a solução do sistema é constante e, igual a $(0,0)$, pelo que a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema.

Se $Y_0 = (-5,-1)$, isto é, quando a condição inicial pertence ao espaço próoprio associado ao valor próprio 4,

$$Y(t) = e^{At}Y_0 = \frac{-1}{6}\begin{bmatrix} -e^{-2t} - 5e^{4t} & 5e^{-2t} - 5e^{4t} \\ e^{-2t} - e^{4t} & -5e^{-2t} - e^{4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5e^{4t} \\ -e^{4t} \end{bmatrix} = -e^{4t}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escrevendo $Y(t) = (x(t), y(t))$, obtémos as equações paramétricas da solução do (1.42)

$$\begin{cases} x(t) = -5e^{4t} \\ y(t) = -e^{4t} \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro t, no espaço $\mathbb{R}^2 \ni (x,y)$ a equação cartesiana da solução é $x = 5y$; isto é, se a condição inicial pertence ao espaço próprio de $\lambda = 4$, a solução do (1.42) nele permanecerá para todo t. Mais se observa que, neste caso

$$\lim_{t\to+\infty} e^{4t} = +\infty\,. \tag{1.43}$$

Nesta direcção, quando $t \to +\infty$, a solução do (PVI) afasta-se do ponto de equilíbrio.

Se $Y_0 = (-1,1)$, isto é, quando a condição inicial pertence ao espaço próprio associado ao valor próprio -2,

$$Y(t) = e^{At}Y_0 = \frac{-1}{6}\begin{bmatrix} -e^{-2t} - 5e^{4t} & 5e^{-2t} - 5e^{4t} \\ e^{-2t} - e^{4t} & -5e^{-2t} - e^{4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} = e^{-t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $Y(t) = (x(t), y(t))$, obtemos então as equações paramétricas da solução do (1.42)

$$\begin{cases} x(t) = -e^{-t} \\ y(t) = e^{-t} \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro t, no espaço (x,y) a equação cartesiana da solução é $x = -y$; isto é, se a condição inicial pertence ao espaço próprio de $\lambda = -2$, a solução do (1.42) nele permanecerá para todo t. Mais se observa que, neste caso

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-2t} = 0\,. \tag{1.44}$$

Nesta direcção, quando $t \to +\infty$, a solução do (PVI) aproxima-se do ponto de equilíbrio. Por este facto, (1.43) e (1.44), dizenos que o equilíbrio é um *ponto de sela*.

Em qualquer outra situação, a solução não é constante nem está confinada a uma recta. Por exemplo, se $Y_0 = (1,1)$, a solução de (1.42) é dada por

$$Y(t) = e^{At}Y_0 = \frac{-1}{6}\begin{bmatrix} -e^{-2t} - 5e^{4t} & 5e^{-2t} - 5e^{4t} \\ e^{-2t} - e^{4t} & -5e^{-2t} - e^{4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2e^{-t} + 5^{4t} \\ 2e^{-t} + e^{4t} \end{bmatrix}$$

Fazendo $Y(t) = (x(t), y(t))$, obtemos as equações paramétricas da solução do (1.42)

$$\begin{cases} 3x(t) = -2e^{-t} + 5e^{4t} \\ 3y(t) = 2e^{-t} + e^{4t} \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro t, no espaço (x, y) a equação cartesiana da solução é

$$x + y = 2\Big(\frac{4}{5x - y}\Big)^2.$$

De um modo geral, se $Y_0 = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, a solução de (1.42) é dada por

$$Y(t) = e^{At}Y_0 = \frac{-1}{6}\begin{bmatrix} -e^{-2t} - 5e^{4t} & 5e^{-2t} - 5e^{4t} \\ e^{-2t} - e^{4t} & -5e^{-2t} - e^{4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{-1}{6}\begin{bmatrix} -\delta e^{-t} + 5\gamma e^{4t} \\ -\delta e^{-t} - \gamma e^{4t} \end{bmatrix}$$

em que, para facilitar a escrita, fizémos $\gamma = \alpha + \beta$ e $\delta = -\alpha + 5\delta$. Fazendo $Y(t) = (x(t), y(t))$, obtemos as equações paramétricas da solução do (1.42)

$$\begin{cases} -6x(t) = -2e^{-t} + 5e^{4t} \\ -6y(t) = 2e^{-t} + e^{4t} \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro t, a equação cartesiana da solução é

$$x + y = \frac{\gamma\delta^2}{((6 + 5\gamma)x + 5\gamma y)^2}.$$

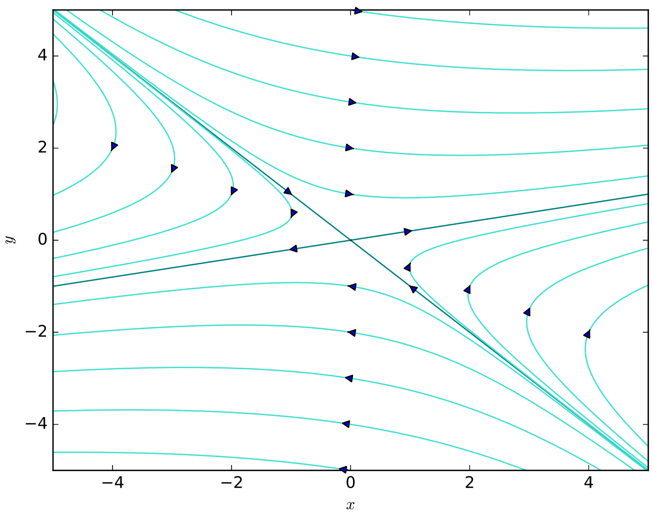

Figura 1.2: *Retrato de fase* da equação $Y' = AY$.

Exemplo 2:

Vamos determinar e^{At}, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Comecemos por calcular uma matriz solução fundamental $S(t)$. Os valores próprios de A são as soluções da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0 \ \Leftrightarrow \ (-1-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda = -1 \ , \ \lambda = 1 \ , \ \lambda = 3$$

Conclui-se de imediato que a matriz A é diagonalizável. Como tal vamos calcular os vectores própios associados. Para $\lambda = -1$, o vector próprio será $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tal que

$$(A + I)v = 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ \Leftrightarrow \ a = c = 0$$

Tem-se então que

$$v = (a, b, c) = (0, b, 0) = b(0, 1, 0)$$

donde podemos escolher $v_1 = (0, 1, 0)$. Para $\lambda = 1$,

$$(A - I)v = 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ \Leftrightarrow \ a + c = 0 \ , \ \ b = 0$$

Tem-se então que

$$v = (a, b, c) = (a, 0, -a) = a(1, 0, -1)$$

donde podemos escolher $v_2 = (1, 0, -1)$. Para $\lambda = 3$,

$$(A - 3I)v = 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ \Leftrightarrow \ a - c = 0 \ , \ \ b = 0$$

Tem-se então que

$$v = (a, b, c) = (a, 0, a) = a(1, 0, 1)$$

donde podemos escolher $v_3 = (1, 0, 1)$.

Então a matriz

$$S(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} & e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

é uma (MSF) associada à equação $Y' = AY$. Dado que

$$S(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

não é a matriz identidade, tem-se que

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & e^{-t} & e^{3t} \\ e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-t} & e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

isto é

$$e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-t}+e^{3t} & 0 & -e^{-t}+e^{3t} \\ 0 & 2e^{-t} & 0 \\ -e^{-t}+e^{3t} & 0 & e^{-t}+e^{3t} \end{bmatrix}$$

Se quisermos determinar a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dY}{dt} = AY + H(t) \quad , \quad Y(0) = [0\ 1\ 0]^T$$

sem que

$$H(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix}$$

a solução é dada pela fórmula da variação das constantes (usando a exponencial da matriz A)

$$y(t) = e^{At}Y(0) + e^{At}\int_0^t e^{-As}H(s)\,ds\,.$$

Então

$$\begin{aligned} Y(t) &= e^{At}\Big(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\int_0^t \begin{bmatrix} e^{-s}+e^{-3s} & 0 & e^{-3s}-e^{-s} \\ 0 & 2e^{s} & 0 \\ e^{-3s}-e^{-s} & 0 & e^{-3s}+e^{-s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^s \\ 0 \\ e^s \end{bmatrix} ds\Big) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} e^t+e^{3t} & 0 & e^{3t}-e^t \\ 0 & 2e^{-t} & 0 \\ e^{3t}-e^t & 0 & e^t+e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-2t}-1 \\ 0 \\ e^{-2t}-1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^t \\ e^{-t} \\ -\frac{1}{2}e^t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.5 Equações Lineares de ordem $n > 1$ — Caso Não Homogéneo

Vamos agora resolver a equação

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\,y' + a_0(t)\,y = b(t) \tag{1.45}$$

em que a_0, a_1,..., a_n e b, são funções contínuas em $I \subseteq \mathbb{R}$. Como em qualquer equação linear não- homogénea, a solução geral de (1.45) é dada por

$$y(t) = y_G(t) + y_P(t)$$

em que y_G denota a solução geral da equação homogénea associada

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + ... + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = 0\,,$$

e y_P uma solução particular da equação (1.45). Iremos estudar dois métodos para determinar y_P: um em que se "adivinha" a solução particular da equação (específico para equações de coeficientes constantes e casos particulares de $b(t)$) - o *Método dos coeficientes indeterminados* - e outro onde se aplica uma fórmula (de aplicação geral) - *Fórmula da Variação das Constantes*.

1.5.1 Cálculo da Solução da Equação — Fórmula da Variação das Constantes

A equação escalar de ordem n, (1.45), pode ser escrita na forma de uma equação vectorial de ordem 1 em $\mathbb{R}^n$ da forma que em seguida se descreve. Considera-se

$$X = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}) \overset{\text{def}}{=} (y, y', ..., y^{(n-1)})$$

E assim

$$\begin{aligned} X' = (x_0', x_1', ..., x_{n-1}') &= (y', y'', ..., y^{(n)}) \\ &= (x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, -a_0(t)\, x_0 - a_1(t)\, x_1 - ... - a_{n-1}(t)\, x_{n-1} + b(t)) \end{aligned}$$

onde se utilizou o facto de pela equação diferencial

$$y^{(n)} = -a_0(t)y - a_1(t)y' - ... - a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t)$$

Assim

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot\ \cdot\ \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot\ \cdot\ \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot\ \cdot\ \cdot & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdot\ \cdot\ \cdot & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix} \tag{1.46}$$

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot\ \cdot\ \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot\ \cdot\ \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot\ \cdot\ \cdot & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdot\ \cdot\ \cdot & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

é denominada *matriz companheira* da equação

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = 0$$

Observa-se que se a equação (1.45) tiver coeficientes constantes (caso em que a_i, $i = 1, \cdots n-1$ são constantes) a matriz companheira da equação será tambem de entradas constantes.

Exemplo 1:
Considere-se a equação de ordem 2

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = h(t)$$

Fazendo $X = (x_0, x_1) = (y, y')$ tem-se que

$$\begin{cases} x_0' = y' = x_1 \\ x_1' = y'' = -b(t)y - a(t)y' + h(t) = -b(t)x_0 - a(t)x_1 + h(t) \end{cases}$$

pelo que a equação de ordem 2 pode ser escrita como a equação vectorial de ordem 1 em $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ h(t) \end{bmatrix}$$

Exemplo 2:
Considere-se a equação de ordem 3

$$y''' + a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = h(t)$$

Fazendo $X = (x_0, x_1, x_2) = (y, y', y'')$ tem-se que

$$\begin{cases} x_0' = y' = x_1 \\ x_1' = y'' = x_2 \\ x_2' = y''' = -c(t)y - b(t)y' - a(t)y'' + h(t) = -c(t)x_0 - b(t)x_1 - a(t)x_2 + h(t) \end{cases}$$

pelo que a equação de ordem 3 pode ser escrita como a equação vectorial de ordem 1 em $\mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c(t) & -b(t) & -a(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h(t) \end{bmatrix}$$

Matriz Wronskiana

Sendo y_1,...,y_n soluções linearmente independentes da equação homogénea associada (determinadas na Secção 2.4. no caso das equações de coeficientes constantes), define-se matriz *Wronskiana* associada como sendo a matriz $n \times n$

$$W(t) = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ . & \dots & . \\ . & \dots & . \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Como as colunas da matriz $W(t)$ são soluções da equação homogénea associada a (1.46), a matriz $W(t)$ é uma matriz solução fundamental da equação vectorial (1.46) pelo que, por aplicação da fórmula da variação das constantes para equações vectoriais, tem-se que uma solução de (1.46) será dada por

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ . \\ . \\ . \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = W(t)C + W(t) \int^t W^{-1}(s) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ b(s) \end{bmatrix} ds\,.$$

Conclui-se que a solução da equação (1.45) é dada por

$$y(t) = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n + \begin{bmatrix} y_1(t) & \ldots & y_n(t) \end{bmatrix} \int^t W^{-1}(s) \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ b(s) \end{bmatrix} ds$$

Exemplo 1:

Determinar a solução geral da equação

$$y'' + 2y' + 2y = 2e^{-t} \tag{1.47}$$

Começemos por determinar uma base do espaço de soluções da equação homogénea associad, isto é resolver a equação

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Big(D^2 + 2D + 2\Big) y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Big((D+1)^2 + 1\Big) y = 0$$

pelo que uma base do espaço de soluções será $e^{-t}\cos t$ e $e^{-t}\operatorname{sen} t$, e a sua solução geral é

$$y_H(t) = c_1 e^{-t}\cos t + c_2 e^{-t}\operatorname{sen} t \quad , \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Uma matriz Wronskiana é dada por:

$$W(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\operatorname{sen} t \\ (e^{-t}\cos t)' & (e^{-t}\operatorname{sen} t)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\operatorname{sen} t \\ -e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t) & e^{-t}(-\operatorname{sen} t + \cos t) \end{bmatrix}$$

e assim, por aplicação da fórmula da variação das constantes, a solução particular é

$$y_P(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\operatorname{sen} t \end{bmatrix} \int W^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^{-t} \end{bmatrix} = 2e^{-t}$$

Finalmente a solução geral de (1.47) é

$$y(t) = c_1 e^{-t}\cos t + c_2 e^{-t}\operatorname{sen} t + 2e^{-t} \quad , \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Exemplo 2:

A fórmula da variação das constantes é também aplicável no caso em que a equação não tem coeficientes constantes. Desde que se conheça uma base de soluções da equação homogénea associada, o cálculo da solução é análogo ao que fizémos no exemplo anterior. Assim, considere-se a equação diferencial

$$y'' + \Big(t - \frac{3}{t}\Big)y' - 2y = t^4 \quad , \quad t > 0$$

É fácil de verificar que as funções

$$y_1(t) = e^{-t^2/2} \qquad , \qquad y_2(t) = t^2 - 2$$

são soluções linearmente independentes da equação homogénea associada e como tal formam uma base do seu espaço de soluçõe. Assim podemos construir a matriz Wronskiana associada

$$W(t) = \begin{bmatrix} e^{-t^2/2} & t^2 - 2 \\ -te^{-t^2/2} & 2t \end{bmatrix}$$

e pela fórmula da variação das constantes a solução geral da equação é dada por

$$y(x) = \begin{bmatrix} e^{-t^2/2} & t^2 - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t^2/2} & t^2 - 2 \end{bmatrix} \int W^{-1}(t) \begin{bmatrix} 0 \\ t^4 \end{bmatrix} dt$$

ou seja

$$y(t) = c_1 e^{-t^2/2} + c_2(t^2 - 2) + 4 - 2t^2 + \frac{t^4}{2}$$

1.5.2 Método dos Coeficientes Indeterminados

Aplicável **apenas** nos casos em que a equação tem coeficientes constantes, e $h(t)$ é uma função da forma

$$t^p e^{\lambda t} \quad \text{ou} \quad t^p e^{at}\cos(bt) \quad \text{ou} \quad t^p e^{at}\,\mathrm{sen}(bt) \quad , \quad p \in \mathbb{N}_0 \tag{1.48}$$

ou suas combinações lineares.

Dada uma função $f(t)$, define-se *polinómio aniquilador* de f ao polinómio diferencial de menor ordem, $P_A(D)$, que verifica

$$P_A(D)f = 0$$

Se $f(t)$ é uma combinação linear de funções do tipo descrito em (1.48), então existe um polinómio aniquilador, e, pela secção 2.4.1, concluimos que

se $b(t) = t^p e^{\lambda t}$, então o seu polinómio aniquilador é

$$P_A(D) = (D - \lambda)^{p+1}$$

se $b(t) = t^p e^{at}\cos(bt)$ ou $b(t) = t^p e^{at}\,\mathrm{sen}(bt)$, então o seu polinómio aniquilador é da forma

$$P_A(D) = (D - (a + ib))^{p+1}(D - (a - ib))^{p+1} = ((D - a)^2 + b^2)^{p+1}y$$

O método dos coeficientes indeterminados para resolver a equação $P(D)y = b(t)$ consiste em:

1. Determinar o polinómio aniquilador, $P_A(D)$, de $b(t)$. Seja k o seu grau.

2. Aplicar $P_A(D)$ a ambos os membros da equação inicial, donde resulta:

$$P(D)y = h(t) \quad \Rightarrow \quad P_A(D)P(D)y = P_A(D)h(t) \quad \Leftrightarrow \quad P_A(D)P(D)y = 0$$

Note que a aplicação de $P_A(D)$ **não** produz uma equação equivalente à inicial. Embora qualquer solução de $P(D)y = h(t)$ seja solução de $P_A(D)P(D)y = 0$, nem todas as soluções da segunda equação resolvem a primeira.

Assim obtivemos uma equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes de ordem $n + k$.

3. A solução geral da equação $P_A(D)P(D)y = 0$ é dada por

$$y(t) = \alpha_1 y_1 + ... + \alpha_n y_n \ + \ \beta_1 w_1 + ... + \beta_p w_p$$

em que y_1, ..., y_n são as soluções linearmente independentes da equação $P(D)y = 0$ determinadas previamente, ou seja:

$$y_G(t) = \alpha_1 y_1 + ... + \alpha_n y_n$$

Tem-se então que existem β_1, ..., $\beta_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$y_P = \beta_1 w_1 + ... + \beta_p w_p$$

é uma solução particular de $P(D)y = b$.

4. Determinam-se os coeficientes β_1, ..., β_p de modo a que $w = \beta_1 w_1 + ... + \beta_p w_p$ verifique $P(D)w = b$.

Exemplo 1:
Determinar a solução do PVI

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x} \quad , \quad y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 1 \tag{1.49}$$

A solução da equação diferencial é da forma

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

em que y_H é a solução geral da equação homogénea associada, e y_P é uma solução particular da equação completa.

- *Cálculo de* y_H

  A equção homogénea associada é

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

  Fazendo $y' = Dy$, obtém-se

$$(D^2 + 3D + 2)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D+1)(D+2)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D+1)y = 0 \ \text{ ou } \ (D+2)y = 0$$

  Uma solução da equação $(D+1)y = 0$ é e^{-x}. Por outro lado a equação $(D+2)y = 0$ tem como solução e^{-2x}. Como tal

$$y_H(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} \quad , \quad c_1, \ c_2 \in \mathbb{R}$$

- *Cálculo de y_P*

  Dado que $h(x) = e^{-x}$, podemos utilizar o métododos coeficientes indeterminados para determinar a solução particular y_P. O polinómio aniquilador de $h(x)$ é

  $$P_A(D) = D + 1$$

  Assim, e utilizando a factorização do polinómio característico feito anteriormente:

  $$(D+1)(D+2)y = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad (D+1)(D+1)(D+2)y = (D+1)e^{-x}$$

  Ou seja

  $$(D+1)^2(D+2)y = 0$$

  Resolvendo a equação homogénea obtém-se que

  $$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3e^{-2x}$$

  Dado que $c_1e^{-x} + c_3e^{-2x}$ representa a solução geral da equação homogénea associada a (1.49), conclui-se que a forma da solução particular é $w(x) = \alpha xe^{-x}$. Seguidamente teremos que determinar o valor da constante α de modo a que w seja solução da equação $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$. Tem-se então que

  $$(\alpha xe^{-x})'' + 3(\alpha xe^{-x})' + 2(\alpha xe^{-x}) = e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 1$$

  Conclui-se que

  $$y_P(x) = xe^{-x}$$

- *Cálculo da solução geral de (1.49)*

  Como já foi referido

  $$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + xe^{-x} \quad , \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

- *Cálculo da solução de (1.49)*

  Para que as condições iniciais se verifiquem

  $$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 - 2c_2 + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

  Finalmente a solução de (1.20) é

  $$y(x) = xe^{-x}$$

Exemplo 2:
Determinar a solução do PVI

$$y'' + 16y = \operatorname{sen}(4t) \quad , \quad y(0) = 1 \ , y'(0) = 0 \tag{1.50}$$

A solução da equação diferencial é da forma

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

em que y_H é a solução geral da equação homogénea associada, e y_P é uma solução particular da equação completa.

- *Cálculo de y_H*

  A equção homogénea associada é
  $$y'' + 16y = 0$$
  Fazendo $y' = Dy$, obtém-se $(D^2 + 16)y = 0$, pelo que
  $$y_H(x) = c_1 \operatorname{sen}(4t) + c_2 \cos(4t) \quad , \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

- *Cálculo de y_P*

  Dado que $b(t) = \operatorname{sen}(4t)$, podemos utilizar o métododos coeficientes indeterminados para determinar a solução particular y_P. O polinómio aniquilador de $b(t)$ é
  $$P_A(D) = (D - 4\mathrm{i})(D + 4\mathrm{i}) = D^2 + 16$$
  Assim
  $$(D^2 + 16)y = \operatorname{sen}(4t) \quad \Rightarrow \quad (D^2 + 16)(D^2 + 16)y = (D^2 + 16) \operatorname{sen}(4t)$$
  Ou seja
  $$(D^2 + 16)^2 y = 0$$
  Resolvendo esta equação homogénea obtém-se que
  $$y(t) = c_1 \operatorname{sen}(4t) + c_2 \cos(4t) + c_3 t \operatorname{sen}(4t) + c_4 t \cos(4t)$$
  Dado que $c_1 \operatorname{sen}(4t) + c_2 \cos(4t)$ representa a solução geral da equação homogénea associada a (1.50), conclui-se que a forma da solução particular é $w(t) = c_3 t \operatorname{sen}(4t) + c_4 t \cos(4t)$. Seguidamente teremos que determinar as constantes $c_3 e c_4$ de modo a que w seja solução da equação $y'' + 16y = \operatorname{sen}(4t)$. Tem-se então que
  $$(c_3 t \operatorname{sen}(4t) + c_4 t \cos(4t))'' + 16(c_3 t \operatorname{sen}(4t) + c_4 t \cos(4t)) = \operatorname{sen}(4t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_3 = 0 \\ c_4 = -1/8 \end{cases}$$
  Conclui-se que
  $$y_P(t) = -\frac{t \cos(4t)}{8}$$

- *Cálculo da solução geral de (1.50)*

  Como já foi referido
  $$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = c_1 \operatorname{sen}(4t) + c_2 \cos(4t) - \frac{t \cos(4t)}{8} \quad , \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

- *Cálculo da solução de (1.50)*

  Para que as condições iniciais se verifiquem
  $$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_2 = 1 \\ 4c_1 - \frac{1}{8} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = \frac{1}{32} \\ c_2 = 1 \end{cases}$$
  Finalmente a solução de (1.50) é
  $$y(t) = \frac{1}{32} \operatorname{sen}(4t) + \cos(4t) - \frac{t \cos(4t)}{8}$$

1.6 Existência, Unicidade e Prolongamento de Soluções

Consideramos o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y) \\ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.51}$$

onde a função $f : D \to \mathbb{R}$ tem domínio aberto $D \subset \mathbb{R}^2$. É costume designar $f(t,y)$ por *campo de direcções* da equação diferencial em (1.52); isto deriva do facto de **a recta tangente ao gráfico das soluções da equação diferencial** ter, em cada ponto (t,y) desse gráfico, **declive igual a** $f(t,y)$. Note que se $y(t)$ é solução da equação diferencial então $f(t,y(t)) = \frac{dy}{dt}(t)$.

Nesta secção estudamos as condições que a função $f(t,y)$ deve verificar para que a solução do PVI:

- exista;
- seja única;
- esteja definida num intervalo maximal $I =]a,b[$.

Estas questões matemáticas são muito importantes do ponto de vista das aplicações. Os métodos numéricos que na prática são aplicados no cálculo aproximado de soluções de uma equação diferencial ordinária exigem, como hipótese, que a solução do PVI exista, seja única e que dependa continuamente das condições iniciais — isto é, que seja um *problema bem posto*. É sabido que quando um PVI falha uma daquelas propriedades as soluções dos esquemas numéricos correspondentes podem exibir comportamentos que as tornam inúteis, na óptica das aplicações.

1.6.1 Teorema de Peano

Se exigirmos apenas continuidade de $f(t,y)$, podemos provar o:

Teorema de Peano (Existência de solução local)

Considere-se $D \subseteq \mathbb{R}^2$, e $f : D \to \mathbb{R}$, contínua em $(t,y) \in D$. Se $(t_0, y_0) \in D$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admite pelo menos uma solução, $y(t)$, num intervalo $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ para certo $\alpha > 0$.

Pode-se então colocar a questão de saber se a continuidade de $f(t,y)$ é suficiente para provar unicidade de solução. A subsecção seguinte mostra que a resposta a esta questão é negativa.

1.6.2 Exemplo de não unicidade de solução

Considere-se o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = |y|^{1/2} \\ y(0) = 0 \ , \end{cases}$$

Vamos construir um conjunto infinito de soluções para este PVI.

Começamos por notar que a solução constante $y(t) \equiv 0$ é solução do PVI.

Por outro lado, admitindo que $y(t) > 0$, a equação pode ser escrita na forma

$$y^{-1/2}\frac{dy}{dt} = 1 \ \Leftrightarrow \ \frac{d}{dt}\Big(\int y^{-1/2}dy\Big) = 1 \ \Leftrightarrow \ 2y^{1/2} = t + c$$

Desta forma, para $t + c > 0 \Leftrightarrow t > -c$, a função

$$y(t) = \frac{1}{4}(t+c)^2$$

é continuamente diferenciável e satisfaz a equação diferencial para $t > -c$.

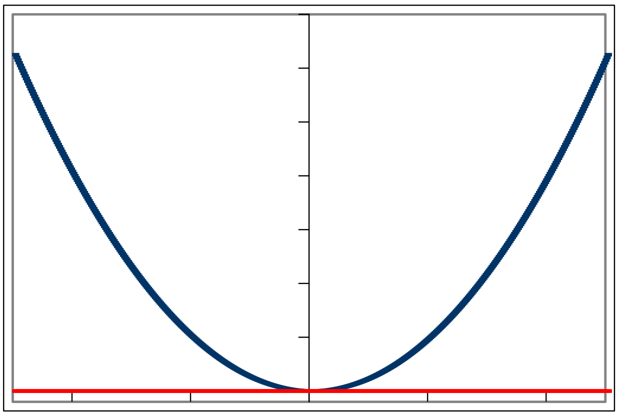

Figura 1.3: A solução de equilíbrio $y(t) \equiv 0$ e a solução $y(t) = t^2/4$.

Podemos agora utilizar o método de "cortar" e "colar" a partir das soluções $y(t) \equiv 0$ e $y(t) = \frac{1}{4}(t+c)^2$, para $t > -c$, para criar novas soluções do PVI. Será necessário, obviamente, que que no "ponto de colagem" a nova solução seja uma função contínua, diferenciável e que verifique a equação diferencial.

Para $t_1 > 0$, defina-se

$$y_{t_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ t \leq t_1 \\ \\ \dfrac{1}{4}\big(t - t_1\big)^2 & \text{se } \ t > t_1 \end{cases}$$

Verifica-se que y_{t_1} é diferenciável e verifica a equação diferencial em $\mathbb{R}\backslash\{t_1\}$, pois foi construída à custa das soluções $y(t) \equiv 0$ e $y(t) = \frac{1}{4}(t+c)^2$, com $c = -t_1$. Note que esta escolha de c faz precisamente com que

$$\lim_{t\to t_1^-} y_{t_0}(t) = \lim_{t\to t_1^+} y_{t_1}(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = \Big(\frac{t_1}{2} - k\Big)^2 \ ,$$

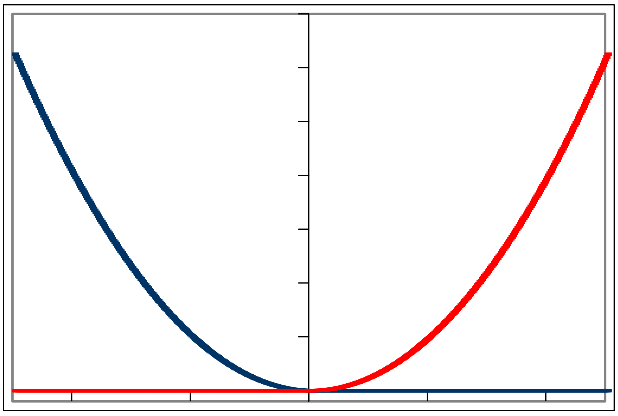

Figura 1.4: As soluções do PVI quando $c = 0$.

ou seja, que y_{t_1} seja contínua em t_1 e $y_{t_1}(t_1) = 0$. Também as derivadas laterais de y_{t_1} em t_1 existem e são nulas, pelo que y_{t_1} satisfaz a equação diferencial em t_1.

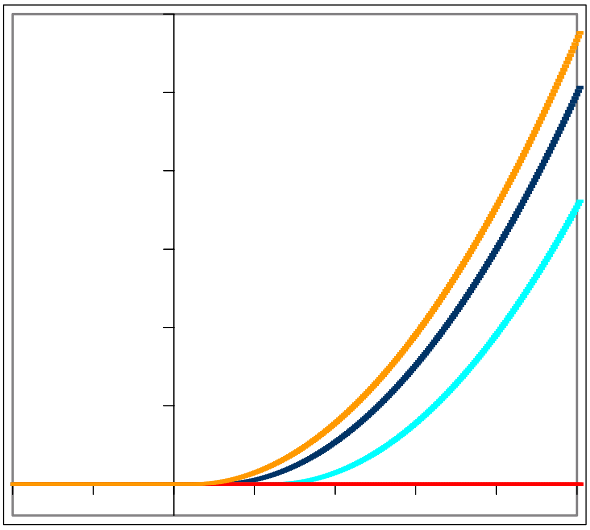

Figura 1.5: As soluções y_{t_1} com $t_1 = 1/5$, $t_1 = 1/2$ e $t_1 = 6/5$.

O facto de existirem uma infinidade de soluções mostra que a continuidade da função $f(t, y) = \sqrt{y}$ no seu domínio não é suficiente para garantir unicidade de solução para o PVI.

De facto, temos que

$$|f(t,x) - f(t,y)| = \left| \frac{\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}}{x - y} \right| |x - y|,$$

onde o termo

$$\left| \frac{\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}}{x - y} \right|,$$

não é limitado para x, y num vizinhança qualquer da origem. Isto implica, em particular, que fixando $y = 0$ as taxas médias de crescimento da função f não são limitadas. Ora, foi precisamente nos pontos onde a solução da equação é nula que se observou a bifurcação de soluções!

Nesta subsecção veremos que o campo de direcções, f — para além de ser contínuo — se $\partial f/\partial y$ for tambem contínua, então o correspondente (PVI) tem solução local única.

Teorema de Picard

(versão fraca)

Considere-se $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f : D \to \mathbb{R}$, D contínua em $(t, y) \in D$ e $\partial f/\partial y$ contínua em D. Se $(t_0, y_0) \in D$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admite uma única solução, $y(t)$, para t pertencente a $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ para certo $\alpha > 0$.

Observa-se que a condição $\partial f/\partial y$ contínua é exigente demais. De facto o Teorema de Picard é válido para as deniminadas *funções de variação limitada*. Mais à frente faremos, para quem estiver interessado, uma breve abordagem a esta classe de funções, enunciaremos e faremos vários passos da demonstração do teorema de Picard na sua versão mais geral.

A demonstração deste teorema é feita de forma construtiva, sendo construída à custa de uma sucessão de aproximações da solução. Apresentaremos em seguida essa construção.

Equivalência entre o Problema de Valor Inicial e um Problema Integral

É fácil verificar que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y) \\ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.52}$$

é equivalente à equação integral

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)\, ds \tag{1.53}$$

para $y \in C^1(I)$, sendo I qualquer intervalo aberto contendo t_0.

De facto, se $y \in C^1(I)$ satisfaz o PVI (1.52) então, integrando ambos os membros da equação diferencial entre t_0 e t e usando o teorema fundamental do cálculo:

$$\int_{t_0}^{t} y'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)\, ds \quad \Leftrightarrow \quad y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)\, ds$$

Usando agora a condição inicial do PVI (1.52), obtém-se a equação integral (1.53).

Reciprocamente, admitindo que $y \in C(I)$ é solução da equação integral (1.53) então, aplicando o teorema fundamental do cálculo ao integral do membro direito da equação conclui-se que $y(t)$ é diferenciável e que:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) \quad \forall t \in I.$$

Assim sendo, $y(t)$ é solução da equação diferencial. Por outro lado, substituindo t por t_0 na equação integral (1.53), obtém-se $y(t_0) = y_0$.

A equação integral é, do ponto de vista da Análise Matemática, muito útil pois a estimação de integrais é mais fácil que a das derivadas.

Iteradas de Picard

Derivamos agora a partir da equação integral uma sucessão de aproximações — as $\text{iteradas de Picard}$. Trata-se de uma sucessão de funções contínuas $y_n : I \to \mathbb{R}$ definida recursivamente por:

$$
\begin{aligned}
y_0(t) &= y_0 \\
y_1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_0(s)\big)\, ds \\
y_2(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(t, y_1(s)\big)\, ds \\
&\vdots \\
y_{n+1}(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_n(s)\big)\, ds \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Exemplo 1: Considere-se o PVI

$$
\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{1.54}
$$

A solução do PVI (1.54) é

$$
y(x) = e^{x^2} \qquad , \qquad I_{\text{Max}} = \mathbb{R}
$$

Por outro lado a sucessão $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ das iteradas de Picard associadas ao (PVI) é

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= y_0 = 1 \\
y_1(x) &= 1 + \int_0^{t} 2sy_0(s)\, ds = 1 + \int_0^{x} (2s)\, ds = 1 + x^2 \\
y_2(x) &= 1 + \int_0^{x} (2sy_1(s))\, ds = 1 + \int_0^{x} 2s(1+s^2)\, ds = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} \\
y_3(x) &= 1 + \int_0^{x} (2sy_2(s))\, ds = 1 + \int_0^{x} 2s(1+s^2+\frac{s^4}{2})\, ds = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Na Figura (2.5) estão representadas as primeiras iteradas de Picard assim como a solução do (PVI).

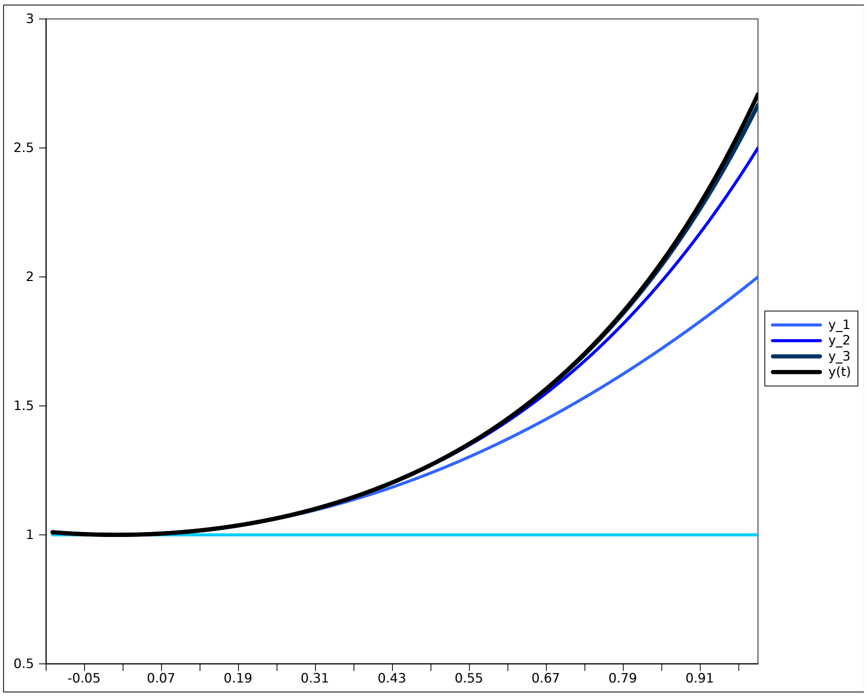

Figura 1.6: Algumas iteradas de Picard e a solução do (PVI) (1.54).

Pode-se verificar, por indução matemática, que:

$$y_n(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} \cdots + \frac{x^{2k}}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k!}.$$

Neste caso, a sucessão das iteradas de Picard, y_n, é precisamente igual à sucessão das somas parciais da série de McLaurin da solução do (PVI), $y(x) = e^{x^2}$. No entanto, e conforme se ilustra no exemplo seguinte, tal tipo de identidade pode não se verificar mesmo em casos simples.

Exemplo 2: Considere-se o (PVI)

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{1.55}$$

Vamos construir a sucessão $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ das iteradas de Picard associadas ao (PVI). Assim:

$$y_0(x) = y_0 = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (y_0(s))^2 ds = 1 + \int_0^x 1\, ds = 1 + x$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (y_1(s))^2 ds = 1 + \int_0^x (1+s)^2\, ds = 1 + x + x^2 + \tfrac{x^3}{3}$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x (y_2(s))^2 ds = 1 + \int_0^x (1 + s + s^2 + \tfrac{s^3}{3})^2\, ds =$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \tfrac{2x^4}{3} + \tfrac{x^5}{3} + \tfrac{x^6}{9} + \tfrac{x^7}{63}$$

$$\vdots$$

Por outro lado, resolvendo a equação diferencial, obtém-se

$$y' = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\int y^{-2} dy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{c-x}\,.$$

A solução do (PVI) será então

$$y(x) = \frac{1}{1-x} \qquad , \qquad I_{\text{Max}} =]-\infty, 1[$$

Na Figura (2.6) estão representadas as primeiras iteradas de Picard, bem como a solução do (PVI). É de observar que quando nos aproximamos do ponto $x = 1$ (onde a solução do (PVI) explode) a convergência das iteradas de Picard torna-se cada vez mais lenta.

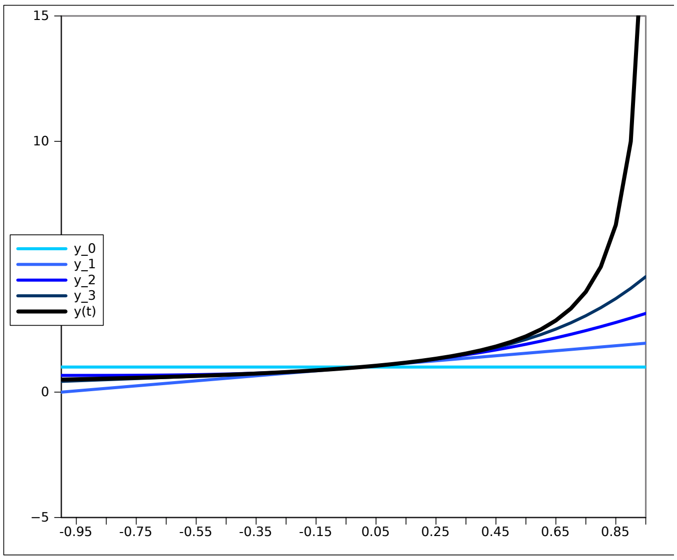

Figura 1.7: Algumas iteradas de Picard e a solução do (PVI) (1.55).

Pode-se provar (a demonstração não é inteiramente trivial) que as iteradas de Picard deste problema verificam

$$y_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + R_{n+1}(x) = S_n(x) + R_{n+1}(x) \tag{1.56}$$

onde $R_{n+1}(x)$ é uma função polinomial com um zero de ordem $n+1$ em $x=0$. Note que $S_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ é a sucessão das somas parciais da série geométrica, cuja soma é precisamente a solução do (PVI), $y(x) = \frac{1}{1-x}$, mas somente em $]-1,1[$. Em casos menos

simples que estes dois exemplos — quando $f(t,y)$ não é uma função polinomial — as iteradas de Picard não são polinomiais; no entanto, e mesmo sem se conhecer a forma explicita dessas iteradas, pode-se usar a análise matemática para provar a sua convergência local.

Para proceder ao resto da demonstarção do Teorema de Picard, teremos que mostrar que a sucessão das iteradas de Picard associada, $y_n(t)$, converge uniformente, num certo intervalo $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ para uma função contínua $y(t)$ então tomando o limite quando $n \to \infty$ em ambos os membros da fórmula que define as iteradas de Picard obtém-se que $y(t)$ satisfaz a equação integral em I, pelo que é solução do PVI no intervalo aberto $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$.

Convergência Uniforme das Iteradas de Picard

Vamos então demonstrar que a sucessão das iteradas de Picard, $y_n(t)$, converge uniformemente num intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, para certo $\alpha > 0$ a determinar (o seu valor irá depender de t_0, y_0 e f).

Começamos por estimar a diferença entre duas iteradas de Picard consecutivas [13]:

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(t) - y_n(t)| &= \left| y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_n(s)\big)\, ds - y_0 - \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_{n-1}(s)\big)\, ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \Big| f\big(s, y_n(s)\big) - f\big(s, y_{n-1}(s)\big) \Big| \, |ds| \end{aligned}$$

Vamos estimar a função integranda através da condição de Lipshitz. Considere-se um rectângulo $R = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : t_0 - a \leq t \leq t_0 + a \ \text{ e } \ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$ contido no domínio, D, de f.

Seja K a constante de Lipshitz de f (relativamente a y) no conjunto compacto R, ou seja, K verifica:

$$|f(t,y) - f(t,x)| \leq K|y - x| \qquad \forall (t,y), (t,x) \in R \tag{1.57}$$

Para que o gráfico das iteradas de Picard permaneça no interior de R (por forma a que a estimativa de Lipshitz (1.57) seja válida quando aplicada a pontos $(t, y_n(t))$, é necessário que:

1º) $t \in]t_0 - a, t_0 + a[$, pelo que devemos ter $\underline{\alpha < a}$.

2º) Seja

$$M = \max\{|f(t,y)| : (t,y) \in R\}$$

[13] Se $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua no intervalo I e $a, b \in I$ (sem que se tenha, necessariamente, $b \geq a$) então obtém-se, como caso particular da propriedade de majoração do integral complexo (Subsecção **??**):

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, |dt|.$$

Note que $\int_a^b |f(t)|\,|dt|$ é igual a $\int_a^b |f(t)|\,dt$ se $b \geq a$ e a $\int_b^a |f(t)| dt$ se $b < a$. Em particular, $\int_a^b |dt| = |b - a|$.

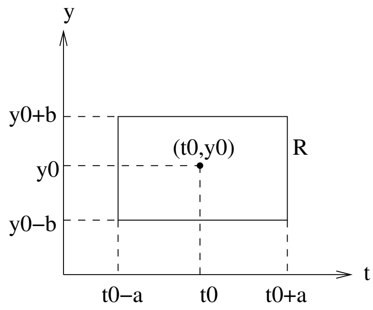

Figura 1.8: O rectângulo R.

Para que $\big(t, y_n(t)\big)$ esteja no interior de R para $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, é necessário que $|y_n(t) - y_0| < b$. Como

$$|y_n(t) - y_0| \leq \int_{t_0}^{t} \big|f\big(s, y_n(s)\big)\big| \; |ds| \leq M \int_{t_0}^{t} |ds| = M|t - t_0| \leq M\alpha,$$

isso implica que devemos ter $M\alpha < b$. Para tal, é preciso exigir $\underline{\alpha < b/M}$.

Assim, para qualquer $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \overset{\text{def}}{=} I_\alpha$:

$$\begin{aligned}
|y_{n+1}(t) - y_n(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} \Big|f\big(s, y_n(s)\big) - f\big(s, y_{n-1}(s)\big)\Big| \, |ds| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} K \, |y_n(s) - y_{n-1}(s)| \; |ds| \\
&\leq K \max_{s \in I_\alpha} \Big|y_n(s) - y_{n-1}(s)\Big| \int_{t_0}^{t} |ds| \\
&\leq K\alpha \max_{s \in I_\alpha} \Big|y_n(s) - y_{n-1}(s)\Big|
\end{aligned}$$

Isto implica que:

$$\begin{aligned}
\max_{t \in I_\alpha} \Big|y_{n+1}(t) - y_n(t)\Big| &\leq K\alpha \max_{t \in I_\alpha} \Big|y_n(t) - y_{n-1}(t)\Big| \\
&\leq (K\alpha)^2 \max_{t \in I_\alpha} \Big|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)\Big| \\
&\;\;\vdots \\
&\leq (K\alpha)^n \max_{t \in I_\alpha} \Big|y_1(t) - y_0\Big|
\end{aligned}$$

Como $y_1(t) - y_0 = \int_{t_0}^{t} f(s, y_0)\, ds$, resulta então da desigualdade anterior que:

$$\begin{aligned}
\max_{t \in I_\alpha} \left| y_{n+1}(t) - y_n(t) \right| &\leq (K\alpha)^n \max_{t \in I_\alpha} \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y_0)\, ds \right| \\
&\leq (K\alpha)^n \max_{t \in I_\alpha} \int_{t_0}^{t} |f(s, y_0)|\, |ds| \\
&\leq (K\alpha)^n \max_{t \in I_\alpha} \int_{t_0}^{t} M |ds| \\
&= (K\alpha)^n M\alpha < (K\alpha)^n b
\end{aligned}$$

Definindo $r = K\alpha$, então

$$\max_{t \in I_\alpha} \left| y_{n+1}(t) - y_n(t) \right| < br^n. \tag{1.58}$$

Utilizando somas telescópicas:

$$\begin{aligned}
y_n(t) &= \big(y_n(t) - y_{n-1}(t)\big) + \big(y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)\big) + \ldots \\
&\quad \ldots + \big(y_2(t) - y_1(t)\big) + \big(y_1(t) - y_0\big) + y_0 \\
&= y_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(y_k(t) - y_{k-1}(t)\Big)
\end{aligned}$$

Isto significa que $y_n(t)$ é a sucessão das somas parciais da série

$$y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \Big(y_k(t) - y_{k-1}(t)\Big) \tag{1.59}$$

A terceira restrição que introduzimos ao valor de α é $r = K\alpha < 1$, ou seja $\underline{\alpha < 1/K}$. Assim, como $|r| < 1$, $\sum_{k=m}^{\infty} br^k$ é uma série geométrica convergente. Por outro lado, o termo geral da série (1.59) verifica

$$\Big| y_k(t) - y_{k-1}(t) \Big| \leq br^k,$$

para $k \geq 1$. Pelo Critério de Weierstrass, $y_n(t)$ converge uniformemente em I_α, e o limite é a soma da série de funções contínuas (1.59). Resulta assim que $y : I_\alpha \to \mathbb{R}$ existe e é contínua desde que tomemos:

$$\alpha < \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K} \right\} \tag{1.60}$$

Utilizando somas telescópicas, e para $n > m$:

$$\begin{aligned}
y_n(t) - y_m(t) &= \big(y_n(t) - y_{n-1}(t)\big) + \big(y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)\big) + \ldots \\
&\quad \ldots + \big(y_{m+2}(t) - y_{m+1}(t)\big) + \big(y_{m+1}(t) - y_m\big) \\
&= \sum_{k=m}^{n-1} y_{k+1}(t) - y_k(t)
\end{aligned}$$

Assim, usando a estimativa (1.58):

$$\begin{aligned}
\Big| y_n(t) - y_m(t) \Big| &\leq \sum_{k=m}^{n-1} \Big| y_{k+1}(t) - y_k(t) \Big| \\
&\leq \sum_{k=m}^{n-1} br^k \leq \sum_{k=m}^{\infty} br^k
\end{aligned}$$

A terceira restrição que introduzimos ao valor de α é $r = K\alpha < 1$, ou seja $\underline{\alpha < 1/K}$. Assim, como $|r| < 1$, $\sum_{k=m}^{\infty} br^k$ é uma série geométrica convergente e a sua soma é $\frac{br^m}{1-r}$. Desta forma, para qualquer $t \in I_\alpha$:

$$\Big| y_n(t) - y_m(t) \Big| \leq \frac{br^m}{1-r} \to 0 \qquad \text{quando} \;\; m, n \to \infty,$$

o que implica que $y_n(t)$ verifica o critério de Cauchy para convergência uniforme em I_α. Assim, $y_n(t)$ converge uniformemente em I_α para uma função contínua $y : I_\alpha \to \mathbb{R}$, desde que tomemos:

$$\alpha < \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K} \right\} \tag{1.61}$$

Existência e Regularidade da Solução

Considerando agora as iteradas de Picard,

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(t, y_n(t)\big)\, dt \tag{1.62}$$

e usando a convergência uniforme de $y_n(t)$ para $y(t)$ em I_α, então tomando o limite em ambos os membros de (1.62) conclui-se que que $y(t)$ satisfaz a equação integral:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(t, y(t)\big)\, dt$$

Como $y(t)$ é contínua em I_α, então $f\big(t, y(t)\big)$ é contínua em I_α. Por aplicação do teorema fundamental do cálculo ao 2º membro da equação integral, podemos concluir que $y \in C^1(I_\alpha)$.

Unicidade de Solução

Supondo que $y(t)$ e $z(t)$ são duas soluções do PVI, então verificam

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(t, y(t)\big)\, dt$$

$$z(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(t, z(t)\big)\, dt$$

em $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, onde α satisfaz (1.61). Assim:

$$\begin{aligned} |y(t) - z(t)| \;\; &\leq \;\; \int_{t_0}^{t} \Big| f\big(s, y(s)\big) - f\big(s, z(s)\big) \Big| \, |ds| \\ &\leq \;\; \int_{t_0}^{t} K\, |y(s) - z(s)| \; |ds| \\ &\leq \;\; K \max_{s \in I_\alpha} \big| y(s) - z(s) \big| \int_{t_0}^{t} |ds| \\ &\leq \;\; K\alpha \max_{s \in I_\alpha} \big| y(s) - z(s) \big| \end{aligned}$$

Como $\alpha < 1/K$, ou seja, $K\alpha < 1$,

$$|y(t) - z(t)| \leq \max_{s \in I_\alpha} \Big| y(s) - z(s) \Big|,$$

sendo a igualdade apenas verificada quando $\max\limits_{s \in I_\alpha} \big| y(s) - z(s) \big| = 0$. Como é impossível que se verifique a desigualdade estrita para todo o $t \in I_\alpha$ (pois o máximo de $|y(t) - z(t)|$ é atingido num ponto $t_1 \in I_\alpha$) concluimos que $\max\limits_{s \in I_\alpha} \big| y(s) - z(s) \big| = 0$, ou seja:

$$y(t) = z(t) \qquad \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$$

□

Exemplos:
(1) Considere-se o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{1 - xy} \quad , \quad y(0) = 0 \tag{1.63}$$

Começemos por observar que $f(x, y) = \sqrt[3]{1 - xy}$

- está definida e é contínua em $\mathbb{R}^2$;
- $\partial f / \partial y$ está definida e é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \ : \ xy = 1\}$.

Conclui-se que $f(x, y)$ verifica as condições do Teorema de Picard em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \ : \ xy = 1\}$. Dado que $(x_0, y_0) = (0, 0) \in D$ o problema de valor inicial (1.63) admite uma única solução, $y(x)$ definida numa vizinhança de $x_0 = 0$.

(2) Considere-se o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{1 - xy} \quad , \quad y(1) = 1 \tag{1.64}$$

Como vimos no exemplo anterior $f(x, y) = \sqrt[3]{1 - xy}$ verifica as condições do Teorema de Picard em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \ : \ xy = 1\}$. Em primeiro lugar, e dado que $f(x, y)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$, o Teorema de Peano garante que o PVI (1.64) admite pelo menos uma solução definida numa vizinhança de $x_0 = 1$. No entanto neste exemplo tem-se que $(x_0, y_0) = (1, 1) \notin D$. Pelo que o Teorema de Picard não é aplicável e assim não se garante unicidade de solução.

1.6.3 Prolongamento de Solução

Sem acrescentar mais condições a f, a conclusão do teorema de Picard pode ser substancialmente melhorada da forma que em seguida se descreve.

Teorema (Prolongamento de Solução):
Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $(t_0, y_0) \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ contínua e localmente lipshitziana relativamente a y em D. Então a solução única do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = y_0$$

está definida num intervalo máximo de definição, $I_{max} =]a, b[$, cujos extremos, $a, b \in \mathbb{R}$, verificam

(i) $b = +\infty$ **ou**

(ii) $b < +\infty$ e $\big(t, y(t)\big) \to \partial D$ quando $t \to b^-$ **ou**

(iii) $b < +\infty$ e $\lim\limits_{t \to b^-} |y(t)| = +\infty$

e

(i) $a = -\infty$ **ou**

(ii) $a < -\infty$ e $\big(t, y(t)\big) \to \partial D$ quando $t \to a^+$ **ou**

(iii) $a < -\infty$ e $\lim\limits_{t \to a^+} |y(t)| = +\infty$

Note que os casos do tipo (iii) significam que a solução explode (respectivamente, quando $t \to b$ ou $t \to a$). Quanto aos casos do tipo (ii), por exemplo

$$\big(t, y(t)\big) \to \partial D \quad \text{quando} \quad t \to b^-$$

significa que qualquer ponto limite do gráfico de $y(t)$ para $t \in [t_0, b[$ (este gráfico é o conjunto $\{(t, y(t)) \,:\, t \in [t_0, b[\} \subset \mathbb{R}^2$) pertence à fronteira de D, ∂D. Isto é equivalente a dizer que qualquer sucessão $t_n \in \,]a, b[$ tal que $t_n \to b$ e $y(t_n)$ é convergente verifica:

$$\lim_{n \to +\infty} \big(t_n, y(t_n)\big) \in \partial D$$

(e, analogamente, quando $t \to a^+$).

Dem.:
Vamos provar a conclusão do teorema para o prolongamento para a direita, isto é, até b.

Seja J o conjunto dos $\tau \in \mathbb{R}$ tais que existe solução $y : [t_0, \tau] \to \mathbb{R}$ do problema de valor inicial [14]. Pelo teorema de Picard, $J \neq \emptyset$. Se J não for majorado, então a conclusão do teorema é satisfeita pois verifica-se o caso (i). Por outro lado, se J é majorado, como $J \neq \emptyset$ então existe $b = \sup J < +\infty$. Pelo teorema de Picard, $J \neq \emptyset$. Se J não for majorado, então a conclusão do teorema é satisfeita pois verifica-se o caso (i). Por outro lado, se J é majorado, como $J \neq \emptyset$ então existe $b = \sup J < +\infty$.

Admitamos que tanto (ii) como (iii) não se verificam. Como $\lim\limits_{t \to a^+} |y(t)| = +\infty$ não é verdade, então existe uma sucessão $s_n \to b^-$ tal que $y(s_n)$ é limitada; sendo limitada, tal sucessão tem uma subsucessão convergente. Isto mostra que existem sucessões $t_n \in \,]a, b[$ tais que $t_n \to b$ e $y(t_n)$ é convergente. Mas como (ii) não se verifica, então para pelo menos uma dessas sucessões, $\big(t_n, y(t_n)\big)$ converge para um certo $(b, \omega) \in \operatorname{int} D$.

Seja $\delta < \frac{1}{3}\operatorname{dist}\big((b, \omega), \partial D\big)$; assim sendo, $\overline{B_{3\delta}(b, \omega)}$ é um subconjunto compacto de D. Seja K a constante de Lipshitz de f em $\overline{B_{3\delta}(b, \omega)}$ e

$$\alpha = \min\left\{\delta, \frac{\delta}{M}, \frac{1}{K}\right\}. \tag{1.65}$$

[14] Note que se $y : I \to \mathbb{R}$ e $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ (onde $I \subset \tilde{I}$ são intervalos), então a solução $\tilde{y}$ restrita a I é uma solução do PVI em I. Resulta da unicidade de solução do PVI que $\tilde{y}(t) = y(t)$ para qualquer $t \in I$; ou seja, a restrição de $\tilde{y}$ ao domínio de y, I, coincide necessariamente com y.

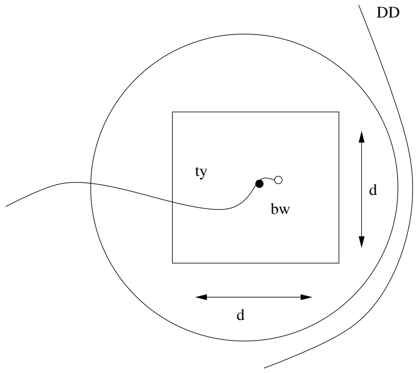

Figura 1.9

Seja $(\bar{t}, \bar{y})$ um termo da sucessão $\big(t_n, y(t_n)\big)$ tal que

$$\big\|(\bar{t}, \bar{y}) - (b, \omega)\big\| < \alpha \tag{1.66}$$

Então o quadrado

$$R = \Big\{(t, y) : t \in [\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta] \ \text{ e } \ y \in [\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta]\Big\}$$

verifica

$$R \subset \overline{B_{\delta\sqrt{2}}(\bar{t}, \bar{y})} \subset B_{\delta\sqrt{2}+\alpha}(b, \omega) \subset B_{3\delta}(b, \omega),$$

pois, tendo em conta (1.65), $\delta\sqrt{2} + \alpha \leq \delta\sqrt{2} + \delta < 3\delta$.

Pela demonstração do teorema de Picard e (1.65), concluimos que a solução $y(t)$ admite extensão ao intervalo $[t_0, \bar{t} + \alpha]$ e que, tendo em conta (1.66), $b - \bar{t} < \alpha$, o que implica que:

$$\bar{t} + \alpha > b$$

Mas isto é absurdo, pois contradiz o facto de que $b = \sup J$.

A demonstração do prolongamento para a esquerda (até a) é análoga à anterior. $\square$

Em qualquer um dos casos, verificar que a solução não pode ser prolongada até $t = \infty$ (ou $t = -\infty$) porque a fronteira do conjunto D é atingida pode ser fácil de constatar pois a função $f(t, y)$ é dada e, consequentemente, conhecemos os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ onde o gráfico da solução não pode entrar. Para mostrar que a solução explode (ou que não explode) ou, mais genericamente, que o seu gráfico está confinado a uma certa região de $\mathbb{R}^2$, é muito útil o seguinte critério.

1.6.4 Comparação de Soluções

Considere-se $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ verificando as condições do Teorema de Picard e $(t_0, y_0) \in D$.

Sejam ainda, $y(t)$ a solução do PVI

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad , \qquad y(t_0) = y_0$$

e $u(t)$ a solução do PVI

$$\frac{du}{dt} = g(t, u) \qquad , \qquad u(t_0) = y_0$$

Se

$$f(t, y) \leq g(t, y) \quad , \quad \forall (t, y) \in D$$

então

$$\begin{cases} y(t) \leq u(t) \quad \text{para todo} \quad t \geq t_0 \\ \\ y(t) \geq u(t) \quad \text{para todo} \quad t \leq t_0 \end{cases}$$

Consequências:

- **Mostrar que a solução explode**

  Seja $u(t)$ a solução do PVI

  $$\frac{du}{dt} = g(t, u) \qquad , \qquad u(t_0) = \alpha$$

  definida em $I^u_{\max} =]t_0 - \epsilon, T[$, tendo-se que $\lim\limits_{t \to T^-} u(t) = +\infty$. Se $y(t)$ é solução do PVI

  $$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad , \qquad y(t_0) = \alpha$$

  e $f(t, y) \geq g(t, y)$ para todo (t, y) (observe-se que pelo teorema anterior esta condição implica que $y(t) \geq u(t)$ para todo $t \geq \alpha$), então $y(t)$ explode no intervalo $]t_0, T]$, isto é, existe $\Theta \in]t_0, T]$ tal que $\lim\limits_{t \to \Theta^-} y.(t) = +\infty$ e consequentemente $\sup I^y_{\max} = \Theta$

- **Mostrar que a solução não explode**

  Seja $u(t)$ a solução do PVI

  $$\frac{du}{dt} = g(t, u) \qquad , \qquad u(t_0) = \alpha$$

  definida em $I^u_{\max} =]a, +\infty[$ para certo $a < t_0$. Se $y(t)$ é solução do PVI

  $$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad , \qquad y(t_0) = \alpha$$

  e $f(t, y) \leq g(t, y)$ para todo (t, y) (observe-se que pelo teorema anterior esta condição implica que $y(t) \leq u(t)$ para todo $t \geq \alpha$), então $y(t)$ não explode para $+\infty$ em $]t_0, +\infty[$. Analogamente, seja $v(t)$ a solução do PVI

  $$\frac{dv}{dt} = h(t, v) \qquad , \qquad v(t_0) = \alpha$$

definida em $I_{\max}^v =]a_1, +\infty[$ para certo $a_1 < t_9$. Se $y(t)$ é solução do PVI

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \qquad , \qquad y(t_0) = \alpha$$

e $f(t,y) \geq h(t,y)$ para todo (t,y) (observe-se que pelo teorema anterior esta condição implica que $y(t) \geq v(t)$ para todo $t \geq \alpha$), então $\underline{y(t)}$ não explode para $-\infty$ em $]t_0, +\infty[$. Conclui-se que $y(t)$ não explode no intervalo $]t_0, +\infty[$.

Exemplo 1

Considere-se o (PVI)

$$y' = (1+y^2)f(ty) \quad , \quad y(0) = 0$$

em que f é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$, verificando $f(x) \geq 1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Como a função $(1+y^2)f(ty)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$, e a função

$$\frac{\partial}{\partial y}\big((1+y^2)f(ty)\big) = 2yf(ty) + (1+y^2)f'(ty)t$$

é tambem contínua em $\mathbb{R}^2$, o teorema de Picard garante a existência de uma solução única $y = \phi(t)$ num vizinhança aberta da origem tal que $\phi(0) = 0$.

Pretendemos agora mostrar que o intervalo máximo de definição da solução do problema de valor inicial é majorado.

$$\dot{y} = (1+y^2)f(ty) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{y}}{1+y^2} = f(ty)$$

Integrando em t obtem-se

$$\int_0^t \frac{\dot{y}(s)}{1+y^2(s)} ds = \int_0^t f(s\,y(s))\,ds$$

pelo que

$$\operatorname{arctg} y(t) - \operatorname{arctg} y(0) = \int_0^t f(s\,y(s))\,ds$$

Visto $y(0) = 0$

$$y(t) = \operatorname{tg}\Big(\int_0^t f(s\,y(s))\,ds\Big)$$

Se $f(x) \geq 1$ e atendendo a que a função tangente é monótona crescente em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, podemos escrever

$$y(t) \geq \operatorname{tg}\Big(\int_0^t 1\;ds\Big) = \operatorname{tg} t$$

Como $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} t = \infty$ a solução explode e como tal o intervalo máximo de definição da solução do problema de valor inicial é majorado.

Exemplo 2

Considere-se o problema de valor inicial

$$y' = -2(\operatorname{sen}(e^{ty}) + 2)y \quad , \quad y(0) = 1 \tag{1.67}$$

Sendo

$$f(t, y) = -2(\mathrm{sen}(e^{ty}) + 2)y$$

é fácil de verificar que tanto f como $\partial f/\partial y$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$. Isto implica que f verifica as condições do Teorema de Picard em $D = \mathbb{R}^2$ e assim (1.67) tem uma solução única numa vizinhança de $t_0 = 0$. Temos agora que mostrar que a solução pode see prolongada a $\mathbb{R}$. Observe-se que para $y_0 \neq 0$, a equação é equivalente a:

$$\frac{y'}{y} = -2(\mathrm{sen}(e^{ty}) + 2)$$

Integrando esta igualdade de 0 a t, obtém-se:

$$\log y(t) - \log y(0) = \int_0^t (-2(\mathrm{sen}(e^{sy(s)}) + 2))ds$$

Como, para quaisquer $(s, y) \in \mathbb{R}^2 2$,

$$-6 \leq -2(\mathrm{sen}(e^{sy(s)}) + 2) \leq -2$$

pode-se concluir que

$$-6t \leq \int_0^t (-2(\mathrm{sen}(e^{sy(s)}) + 2))ds \leq -2t$$

se $t > 0$ e

$$-2t \leq \int_0^t (-2(\mathrm{sen}(e^{sy(s)}) + 2))ds \leq -6t$$

se $t < 0$. Desta forma (e como $\log y(0) = \log 1 = 0$):

$$-6t \leq \log y(t) \leq -2t$$

Em primeiro lugar, isto implica que $y(t)$ nunca atinge o valor 0, pelo que a desigualdade estima o valor de $y(t)$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$. A mesma desigualdade implica também que $y(t)$ não explode em tempo finito, pois $\log y(t)$ é sempre finito para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Como o domíinio de f é $\mathbb{R}^2$, o teorema do prolongamento de solução garante a existência de uma solução global.

1.7 Transformada de Laplace

1.7.1 Definição e Propriedades

Definição da Transformada de Laplace

Seja $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$. Define-se a *Transformada de Laplace* de f como sendo a função

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \tag{1.68}$$

Por vezes usa-se a notação $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ para representar $\mathcal{L}\{f\}(s)$, em situações em que se designa a função f pela fórmula que a define.

Domínio da Transformada de Laplace

Se a função f for seccionalmente contínua em qualquer $[0, T]$, com $T \in \mathbb{R}^+$ e verificar

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \qquad , \qquad \forall t \geq 0 \tag{1.69}$$

para certas constantes $M > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então a transformada de Laplace de f está bem definida para $s > \alpha$.

Demonstração: Para qualquer $t > 0$ e $s > \alpha \Leftrightarrow \alpha - s < 0$:

$$\left| e^{-st} f(t) \right| = e^{-st} |f(t)| \leq e^{-st} M e^{\alpha t} = M e^{(\alpha - s)t}$$

Então, para $s > \alpha$:

$$\left| \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \right| \leq \int_0^\infty M e^{(\alpha - s)t}\, dt = M \lim_{R\to\infty} \left. \frac{e^{(\alpha-s)t}}{\alpha - s} \right|_0^R = \frac{M}{s - \alpha}$$

$\square$

Nota: A definição anterior pode-se generalizar a qualquer $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$. Prova-se, de forma idêntica, que a transformada de Laplace de f é uma função de variável complexa, $s \in \mathbb{C}$, definida pela equação (1.68). Desta forma, $\mathcal{L}\{f\}(s)$ fica bem definida no subconjunto dos números complexos s tais que $\operatorname{Re} s > \alpha$, onde $\alpha \in \mathbb{R}^+$ é a constante obtida da condição de convergência (1.69). O que nos interessará em particular é que $\mathcal{L}\{f\}(s)$ existe sempre para $s \in \mathbb{R}$ maior ou igual que α.

Exemplo:

Sendo $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$, (e também para $a \in \mathbb{C}$) tem-se que

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \lim_{R\to\infty} \left. \frac{e^{(a-s)t}}{a - s} \right|_{t=0}^R = \frac{1}{s - a}\,, \qquad s > a$$

Para $a = \operatorname{Re} a + i \operatorname{Im} a \in \mathbb{C}$, como se tem $|e^{at}| = \left| e^{(\operatorname{Re} a)t + i(\operatorname{Im} t)t} \right| = \left| e^{(\operatorname{Re} a)t} \right| \underbrace{\left| e^{i(\operatorname{Im} a)t} \right|}_{=1} = e^{(\operatorname{Re} a)t}$,

então

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s - a}\,, \qquad s > \operatorname{Re} a.$$

Como caso particular das fórmulas acima, podemos obter

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \mathcal{L}\{e^{0t}\}(s) = \frac{1}{s}\,, \qquad s > 0$$

Função de Heaviside

Sendo $c \in \mathbb{R}$, define-se a *função de Heaviside* (centrada em c) por

$$H_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < c \\ 1 & \text{se} \quad t \geq c \end{cases}$$

Se $c = 0$, escreve-se simplesmente $H(t) \overset{\text{def}}{=} H_0(t)$. Para qualquer $c \in \mathbb{R}$, $H_c(t) = H(t-c)$.

Exemplo: (Transformada de Laplace da função de Heaviside)

Se $c \geq 0$

$$\mathcal{L}\{H_c(t)\}(s) = \int_0^{\infty} H(t-c)e^{-ts}dt = \int_c^{\infty} e^{-ts}dt = \lim_{N\to\infty} -\frac{e^{-ts}}{s}\bigg|_c^N = \frac{e^{-cs}}{s}\,, \quad s > 0$$

Propriedades Elementares da Transformada de Laplace:

Assumindo que as funções f e g admitem transformadas de Laplace bem definidas numa região $s > \alpha$ (para $\alpha \in \mathbb{R}$ dado por uma condição do tipo (1.69)):

(1) Linearidade

$$\mathcal{L}\{f+g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) + \mathcal{L}\{g\}(s)$$

e para $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}\{\alpha f\}(s) = \alpha\mathcal{L}\{f\}(s)$$

Em consequência, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}\left\{\alpha f + \beta g\right\}(s) = \alpha\mathcal{L}\{f\}(s) + \beta\mathcal{L}\{g\}(s)$$

(2) Translação da Transformada de Laplace Para $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s+a) \qquad (s > -a+\alpha)$$

(3) Derivada da Transformada de Laplace Para $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^n}{ds^n}\Big(\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\Big) = (-1)^n\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s)$$

(4) Transformada de Laplace da Translação Para $c \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathcal{L}\{H(t-c)f(t-c)\}(s) = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

(5) Transformada de Laplace da Derivada

Se f admite derivada seccionalmente contínua em $[0,\infty[$ e $s > \alpha$ (da condição (1.69)) então:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

Então, aplicando $n \in \mathbb{N}$ vezes a propriedade anterior, se f admite derivadas seccionalmente contínuas até à ordem n em $[0,\infty[$:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = -f^{(n-1)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - \cdots - s^{n-2}f'(0) - s^{n-1}f(0) + s^n\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

(6) Transformada de Laplace da Convolução

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)\cdot\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

onde $f*t$ designa a convolução de f com f, dada por

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-y)g(y)dy.$$

Demonstração:

(1) A propriedade é verdadeira devido à linearidade dos integrais impróprios.

(2) $\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}e^{-at}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}f(t)\,dt = \mathcal{L}\{f(t)\}(s+a)$

(3) Vamos provar o resultado por indução. No caso $n=1$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(e^{-st}f(t)\right)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}(-t)f(t)\,dt \\ &= -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s)\end{aligned}$$

Admitindo que a propriedade é válida para $n-1$, então (e usando o caso $n=1$):

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \frac{d}{ds}\left(\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\right) = \frac{d}{ds}\Big((-1)^{n-1}\mathcal{L}\{t^{n-1}f(t)\}(s)\Big) \\ &= (-1)^{n-1}\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{t^{n-1}f(t)\}(s) = (-1)^{n-1}(-1)\mathcal{L}\Big\{t(t^{n-1}f(t))\Big\}(s) \\ &= (-1)^n\mathcal{L}\{t^nf(t)\}(s)\end{aligned}$$

(4) Como $H(t-c)=0$ para $t \in [0,c]$:

$$\mathcal{L}\{H(t-c)f(t-c)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} H(t-c)f(t-c)\,dt = \int_c^\infty e^{-st} f(t-c)\,dt$$

Fazendo $\theta = t-c$ no último integral, obtém-se:

$$\mathcal{L}\{H(t-c)f(t-c)\}(s) = \int_0^\infty e^{-s(\theta+c)} f(\theta)\,d\theta = e^{-cs}\int_0^\infty e^{-s\theta} f(\theta)\,d\theta = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

(5) Integrando por partes (e atendendo a que, por hipótese, $s > \alpha$):

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = e^{-st}f(t)\big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

(6) Para simplificar a notação, sejam

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \qquad \text{e} \qquad G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s).$$

O produto das transformadas de Laplace, $F(s)G(s)$, pode ser escrito como o integral duplo:

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \left(\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-sy} g(y)\,dy\right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(x+y)} f(x)g(y)\,dxdy \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $t = x+y \;\Leftrightarrow\; x = t-y$, e notando que o intervalo de integração $x \geq 0$, após a mudança de variável, fica $t = x+y \geq y$, obtém-se:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \int_y^\infty e^{-st} f(t-y)g(y)\,dtdy.$$

Usando o teorema de Fubini para trocar a ordem de integração, e tendo em conta que o domínio de integração, nas duas ordens de integração, é dado por

$$T = \Big\{(t,y)\,:\,0 \leq y < \infty,\, y \leq t < \infty\Big\} = \Big\{(t,y)\,:\,0 \leq t < \infty,\, 0 \leq y < t\Big\},$$

obtém-se finalmente:

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(t-y)g(y)\,dy\right)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}(f*g)(t)dt \\ &= \mathcal{L}\{(f*g)(t)\}(s). \end{aligned}$$

Exemplos

a) Para $b \in \mathbb{R}$, e usando a linearidade da transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{\cos(bt)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{ibt}+e^{-ibt}}{2}\right\}(s) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-ib}+\frac{1}{s+ib}\Big) = \frac{s}{s^2+b^2} \ , \quad s>0.$$

$$\mathcal{L}\{\mathrm{sen}(bt)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{ibt}-e^{-ibt}}{2i}\right\}(s) = \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{s-ib}-\frac{1}{s+ib}\Big) = \frac{b}{s^2+b^2} \ , \quad s>0$$

Note que os domínios das transformadas de Laplace das funções complexas e^{ibt} e $e^{\cdot ibt}$ são dados pelas condições $s > \mathrm{Re}(ib)$ e $s > \mathrm{Re}(-ib)$, o que é equivalente a dizer que $s > 0$.

b) Para a e $b \in \mathbb{R}$, e usando a propriedade da translação da transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\cos(bt)\}(s) = \mathcal{L}\{\cos(bt)\}(s+a) = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2} \ , \quad s>-a$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\mathrm{sen}(bt)\}(s) = \mathcal{L}\{\mathrm{sen}(bt)\}(s+a) = \frac{b}{(s+a)^2+b^2} \ , \quad s>-a$$

c) Se $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$, e usando a propriedade da derivada da transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\Big(\mathcal{L}\{e^{at}\}(s)\Big) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \ , \quad s>a$$

Particularizando o resultado anterior para $a=0$, obtém-se:

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \ , \quad s>0$$

d) Por aplicação da propriedade da transformada de Laplace da translação, determinar $f(t)$ tal que $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2}$.

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = e^{-2s}\frac{1}{s^2} = e^{-2s}\mathcal{L}\{t\}(s) = \mathcal{L}\big\{H(t-2)(t-2)\big\}(s)$$

e) Por aplicação da propriedade da transformada de Laplace da convolução, determinar $h(t)$ tak que $\mathcal{L}\{h(t)\}(s) = \frac{s}{(s+2)(s^2+4)}$.

Seja $F(s) = \frac{1}{s+2}$ e $G(s) = \frac{s}{s^2+4}$. Então:

$$\frac{s}{(s+2)(s^2+4)} \ = \ F(s)G(s) \ = \ \mathcal{L}\{(f*g)(t)\}(s),$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \ &= \ F(s) \ = \ \frac{1}{s+2} \ = \ \mathcal{L}\{e^{-2t}\}(s) \quad \Rightarrow \quad f(t)=e^{-2t} \\
\mathcal{L}\{g(t)\}(s) \ &= \ G(s) \ = \ \frac{s}{s^2+4} \ = \ \mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) \quad \Rightarrow \quad g(t)=\cos 2t
\end{aligned}$$

Resulta então que:

$$\begin{aligned}
h(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}(t) = (f*g)(t) \\
&= \int_0^t e^{-2(t-y)}\cos 2y\,dy = e^{-2t}\int_0^t e^{2y}\cos 2y\,dy \\
&= \frac{e^{-2t}}{4}\Big(e^{2t}(\operatorname{sen} 2t+\cos 2t)-1\Big) \\
&= \frac{1}{4}\big(\operatorname{sen} 2t+\cos 2t-e^{-2t}\big).
\end{aligned}$$

1.7.2 Aplicações da Transformada de Laplace às equações diferenciais

Vamos introduzir um método que permite resolver um problema de valor inicial para uma equação linear de ordem n, de coeficientes constantes. Para tal, vamos usar a Transformada de Laplace para obter a solução de problemas de valor inicial do tipo:

$$\begin{cases} y^n + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = b(t) \\ y(0)=b_0\ ,\ y'(0)=b_1\ ,\ldots,\ y^{(n-1)}(0)=b_{n-1} \end{cases} \tag{1.70}$$

1. Aplicar a Transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial do problema (1.70):
$$\mathcal{L}\{y^n + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y\}(s) = \mathcal{L}\{b(t)\}(s)$$

2. Aplicando as propriedades da transformada de Laplace, e com
$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$$
obtém-se
$$Y(s) = \frac{1}{P(s)}\big(B(s)+Q(s)\big)$$
onde $P(s)$ é o polinómio característico associado a (1.70), $B(s)$ a transformada de Laplace de $b(t)$ e $Q(s)$ um polinómio de grau menor ou igual que $n-1$. Quando as condições iniciais são nulas, $Q(s)=0$.

3. Finalmente, determinar a função $y(t)$ tal que
$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s).$$
Em consequência:
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t)$$
Diz-se que $y(t)$ é a transformada de Laplace inversa de $Y(s)$. Utilizando este método, obtém-se a solução, $y(t)$, do PVI (1.70).

Exemplo:

Determinar a solução (para $t \geq 0$) do problema de valor inicial:

$$\ddot{y} + y = b(t) \qquad , \qquad y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

onde $b(t)$ é definida pela expressão

$$b(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se} \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{se} \quad t \geq 1 \end{cases} = \big(1 - H(t-1)\big)\, t^2 = t^2 - H(t-1)\, t^2$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial, obtém-se

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{y} + y\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{b(t)\right\}(s).$$

Pela propriedade da transformada de Laplace da translação:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{b(t)\right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{t^2\right\}(s) - \mathcal{L}\left\{H(t-1)t^2\right\}(s) = \frac{2}{s^3} - \mathcal{L}\left\{H(t-1)\big((t-1)+1\big)^2\right\}(s) \\ &= \frac{2}{s^3} - e^{-s}\mathcal{L}\left\{(t+1)^2\right\}(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-s}\mathcal{L}\left\{t^2 + 2t + 1\right\}(s) \\ &= \frac{2}{s^3} - e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right) \end{aligned}$$

Por outro, usando a linearidade:

$$\mathcal{L}\left\{\ddot{y} + y\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\ddot{y}\right\}(s) + \mathcal{L}\left\{y\right\}(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-s}\Big(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\Big)$$

Pela propriedade da transformada de Laplace da derivada,

$$-\dot{y}(0) - sy(0) + s^2\mathcal{L}\left\{y\right\}(s) + \mathcal{L}\left\{y\right\}(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-s}\Big(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\Big)$$

Usando a notação $Y(s) = \mathcal{L}\left\{y(t)\right\}(s)$, e atendendo a que $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, tem-se então

$$(s^2+1)Y(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-s}\Big(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\Big),$$

ou seja,

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1}\left(\frac{2}{s^3} - e^{-s}\Big(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\Big)\right).$$

Sejam $F_1(s)$ e $F_2(s)$ tais que:

$$Y(s) \quad = \quad \underbrace{\frac{2}{s^3(s^2+1)}}_{F_1(s)} \quad - \quad \underbrace{e^{-s}\left(\frac{1}{s^2+1}\Big(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\Big)\right)}_{F_2(s)}$$

Em $F_1(s)$, fazendo separação em fracções simples e aplicando as propriedades da Transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \frac{-2}{s} + \frac{0}{s^2} + \frac{2}{s^3} + \frac{2s+0}{s^2+1} \\ &= \frac{-2}{s} + \frac{d^2}{ds^2}\,\frac{1}{s} + 2\,\frac{s}{s^2+1} \\ &= -2\mathcal{L}\{1\}(s) + \mathcal{L}\{t^2\}(s) + 2\mathcal{L}\{\cos t\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{-2 + t^2 + 2\cos t\}(s) \end{aligned}$$

Tratando $F_2(s)$ de forma similar:

$$\begin{aligned}
F_2(s) &= e^{-s}\Big(\frac{-1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s^3}+\frac{s-2}{s^2+1}\Big)\\
&= e^{-s}\Big(\frac{-1}{s}-2\frac{d}{ds}\frac{1}{s}+\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+1}-2\frac{1}{s^2+1}\Big)\\
&= e^{-s}\Big(-\mathcal{L}\left\{1\right\}(s)+2\mathcal{L}\left\{t\right\}(s)+\mathcal{L}\left\{t^2\right\}(s)+\mathcal{L}\left\{\cos t\right\}(s)-2\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} t\right\}(s)\Big)\\
&= e^{-s}\mathcal{L}\left\{-1+2t+t^2+\cos t-2\operatorname{sen} t\right\}(s)\\
&= \mathcal{L}\Big\{H(t-1)\Big(-1+2(t-1)+(t-1)^2+\cos(t-1)-2\operatorname{sen}(t-1)\Big)\Big\}(s)
\end{aligned}$$

Conclui-se que

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \mathcal{L}\Big\{-2+t^2+2\cos t\\
&\qquad -H(t-1)\Big(-1+2(t-1)+(t-1)^2+\cos(t-1)-2\operatorname{sen}(t-1)\Big)\Big\}(s)
\end{aligned}$$

e assim a solução do PVI é

$$\begin{aligned}
y(t) &= -2+t^2+2\cos t-H(t-1)\Big(-1+2(t-1)+(t-1)^2+\cos(t-1)-2\operatorname{sen}(t-1)\Big)\\
&= \begin{cases} -2+t^2+2\cos t & \text{se} \quad 0\le t<1\\[2ex] -3+t^2+2\cos t-2(t-1)-(t-1)^2-\cos(t-1)+2\operatorname{sen}(t-1) & \text{se} \quad t\ge 1\end{cases}
\end{aligned}$$