Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química
$1^{\underline{o}}$ Semestre — 11/12/ 2004

Nome:____
Número:____________________________ Curso: __________

Duração: 1H:30M
Cotação das perguntas de escolha múltipla: Correcta: 1.2 v. Errada: -0,4v.
Instruções:

- **Desligue completamente o seu telemóvel.**
- Não é permitido usar calculadoras.
- As perguntas de escolha múltipla devem ser respondidas neste enunciado, e as perguntas de desenvolvimento em caderno separado.
- **Identifique** e **numere** as páginas do seu caderno de respostas. Se **interromper** uma resposta, **indique**, no sítio onde a interrompeu, o número da página onde vai continuar a resolução.
- Antes de entregar o teste certifique-se que a **tabela da esquerda** está bem preenchida. Nesta tabela marque com um **traço** as linhas correspondentes às perguntas a que não respondeu.

A preencher pelo aluno

Pergunta	Nº das pág. onde está a resolução
8 a)	
8 b)	
8 c)	
8 d)	
9	
10 i)	
10 ii)	
10 b)	

A preencher pelo docente

Pergunta	Classificação	Cotação
8 a)		1
8 b)		1.5
8 c)		1
8 d)		1
9		1.5
10 i)		0.8
10 ii)		0.8
10 b)		1
EM-Cert.		
EM-Erra.		
EM-Total		

Registo:	**Nota:**

1. Considere as afirmações: **[1.2]**

I. Existem transformações linear bijectivas de $\mathbb{R}^5$ para $\mathbb{R}^2$.

II. Existem transformações lineares injectivas do espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3 para espaço das matrizes 2×2.

III. Existem transformações lineares sobrejectivas de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^3$.

IV. Existem transformações lineares sobrejectivas de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^2$.

A lista completa das afirmações verdadeiras é:

☐ I e II e IV ☐ II e III ☐ I e III e IV ☐ II e IV.

---

2. Considere $B_1 = (u, v, w)$ e $B_2 = (2u, -v, w - u)$ duas bases ordenadas de um certo espaço linear V e $T : V \to V$ uma transformação linear que verifica **[1.2]**

$$T(u) = 4u - v, \quad T(v) = 2(v - w), \quad \text{e} \quad T(w) = 2w.$$

A matriz que representa T em relação à base B_1 na partida e B_2 na chegada é:

☐ $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

---

3. Considere as funções $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definidas por: **[1.2]**

$$T_1(x, y) = (x - 1, y + x), \qquad T_2(x, y) = (y, -x)$$

e as afirmações seguintes

I. T_1 é uma transformação linear.

II. $T_1 \circ T_2$ é uma transformação linear.

III. $(T_2 \circ T_1)(1, 1) = (2, 0)$.

IV. T_2 é sobrejectiva.

A lista completa das afirmações correctas

☐ III e IV ☐ I e II e III ☐ I e III ☐ II e IV

---

4. Considere, em $\mathbb{R}^3$, a transformação linear $T(x, y, z) = (2x, y + z, y + z)$ e as afirmações seguintes: **[1.2]**

I. O vector $(0, 0, 1)$ é um vector próprio de T.
II. Zero é um valor próprio de T.
III. O núcleo de T é diferente de $\{(0, 0, 0)\}$.
IV. T é um isomorfismo.

A lista completa das afirmações correctas é:

☐ I e II ☐ II e III ☐ III e IV ☐ II e IV.

---

5. A equação diferencial $y'' - y' + 3y = 0$ é equivalente ao sistema de equações diferenciais de primeira ordem, $Y' = AY$, onde A é a matriz **[1.2]**

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. ☐ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. ☐ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. ☐ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

---

6. Considere os vectores $x = (x_1, x_2, x_3)$ e (y_1, y_2, y_3) de $\mathbb{R}^3$ e a lista seguinte de expressões: **[1.2]**
I. $\langle x, y\rangle = x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3$.
II. $\langle x, y\rangle = 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$.
III. $\langle x, y\rangle = x_1y_1$.
IV. $\langle x, y\rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_3y_3$.
A lista completa das expressões que definem um produto interno em $\mathbb{R}^3$ é

☐ III e IV ☐ I ☐ I e II ☐ II

---

7. Considere $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e o subespaço linear **[1.2]**

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ -x + y + z = 0\right\}.$$

Diga qual dos conjuntos seguintes é uma base ortogonal de W.

☐ $\{(1, 1, 0)\}$ ☐ $\left\{(1, 1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 1)\right\}$

☐ $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ ☐ $\left\{(1, 1, 0), (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1)\right\}$

---

8. Seja P_3 o espaço dos polinómios reais de variável real de grau menor ou igual a três, e $T : P_3 \to P_3$ a transformação linear definida por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = 2a_0 + (a_1 + a_2)x + (a_1 + a_2)x^2 + (a_0 + a_3)x^3.$$

a) Determine a matriz A que representa T em relação à base ordenada $B = (1, x, x^2, x^3)$ de P_3. **[1]**

b) Determine uma base do núcleo de T e diga qual a dimensão da imagem de T. **[1.5]**

c) Resolva em P_3 a equação $T(p(x)) = x + x^2$. **[1]**

d) Indique, justificando, dois valores próprios de T. **[1]**

9. Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais $Y' = AY$ onde $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. **[1.5]**

10. Considere o polinómio $p(\lambda) = \lambda^2(1 - \lambda)$.

a) Indique, justificando convenientemente, o valor lógico de cada uma das afirmações seguintes:

i) Não existe nenhuma matriz invertível que tenha p como polinómio característico. **[0.8]**

ii) Não há nenhuma matriz diagonalizável que tenha p como polinómio característico. **[0.8]**

b) Dê um exemplo de uma matriz não diagonalizável que tenha p como polinómio característico. **[1]**