Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química
1º Semestre — 5/01/2005

Nome:____
Número:______________________________ Curso:________

Indique qual ou quais dos testes entrega:

1º Teste ☐ 1º Teste e 2º Teste ☐

2º Teste ☐

A preencher pelo aluno

Pergunta	Nº das pág. onde está a resolução
T1- 8	
T1- 9 a)	
T1- 9 b)	
T1- 9 c)	
T1-10 a)	
T1-10 b)	
T2-18 a)	
T2-18 b)	
T2-18 c)	
T2-19	
T2-20 a)	
T2-20 b)	

A preencher pelo docente

Pergunta	Classificação	Cotação
8		3.5
9 a)		1.3
9 b)		1.3
9 c)		1.4
10 a)		1
10 b)		1
18 a)		1.5
18 b)		2
18 c)		1.5
19		2
20 a)		1.5
20 b)		1
EM-Cert.		
EM-Erra.		
EM-Total		

Registo:	**Nota:**

Leia as instruções na página seguinte

Instruções

1º Teste (duração: 1h30m): Perguntas de 1 a 10

2º Teste (duração: 1h30m): Perguntas de 11 a 20.

1º Teste + 2º Teste (duração: 3h00m): Todas as perguntas.

Cotações: Perguntas de escolha múltipla: Certa: **1.5val.** Errada: **- 0.5val.** Para quem entregar o 1º Teste e o 2º Teste a classificação será dada pela média: $(T1 + T2)/2$.

- **Desligue completamente o seu telemóvel.**
- As perguntas de escolha múltipla devem ser respondidas neste enunciado, e as perguntas de desenvolvimento em caderno separado.
- **Identifique** e **numere** as páginas do seu caderno de respostas. Se **interromper** uma resposta, **indique**, no sítio onde a interrompeu, o número da página onde vai continuar a resolução.
- Antes de entregar o teste certifique-se que a **tabela da esquerda** (página anterior) está bem preenchida. Nesta tabela marque com um **traço** as linhas correspondentes às perguntas a que não respondeu. Certifique-se ainda que assinalou qual ou quais dos testes respondeu.

Início do 1º Teste

1. Considere o sistema seguinte, onde α é um parametro real: **[1.5]**

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ \alpha y - z = \alpha \end{cases}$$

Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira

☐ A característica da matriz dos coeficientes do sistema varia com α.
☐ Qualquer que seja α, a solução geral do sistema é:

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = (2+\alpha)(1-y) \text{ e } z = \alpha(y-1)\right\}.$$

☐ A característica da matriz aumentada do sistema é 3.
☐ Para $\alpha = 0$ o sistema é possível e determinado.

---

2. Seja $B = \begin{bmatrix} b & 2 & 4 \\ 5a & 5 & c \\ a & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Sabendo que $\det(B) = 2$, considere a seguinte lista de afirmações: **[1.5]**

I. $\det \begin{bmatrix} a & 1 & 4 \\ 5a & 5 & 2c \\ b & 2 & 8 \end{bmatrix} = -4.$ II. $c = 10.$

III. B^2 é invertível. IV. $\det(-B) = 2.$

A lista completa de afirmações correctas é:

☐ III e IV ☐ I e II ☐ I e III ☐ I e III e IV

---

3. O valor do determinante $\begin{vmatrix} 0 & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 1 & 0 \\ 30 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ é: **[1.5]**

☐ α. ☐ 0. ☐ $2\alpha^2 - \alpha$. ☐ 2α.

---

4. Para $V = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 : \; x - y = 0 \wedge w = t\}$, diga qual das afirmações seguintes é verdadeira **[1.5]**

☐ A dimensão de V é 1.
☐ $\{(0, 0, 1, 1, 1)\,,\,(1, 1, 0, 1, 1)\,,\,(0, 0, 0, 1, 1)\}$ é uma base de V.
☐ V não é um subespaço linear de $\mathbb{R}^5$.
☐ $\{(0, 0, 0, 1, 1)\,,\,(1, 1, 0, 0, 0)\}$ é uma base de V.

---

5. Sejam $B_1 = (u, v, w)$ e $B_2 = (u - v, -2v, u - w)$ duas bases ordenadas de um espaço linear. Então as coordenadas de $x = 4u - 2v + 8w$ na base B_2 são **[1.5]**

☐ $(12, -5, -8)$ ☐ $(4, -2, 8)$ ☐ $(12, -1, 8)$ ☐ $(12, 2, -8)$

---

6. No espaço linear dos polinómios de grau menor ou igual a dois, P_2 , considere as afirmações seguintes: **[1.5]**

I. $\{1 - x\,,\, x^2\,, x - 1\,, 2 - x\}$ é linearmente dependente
II. As coordenadas de $p(x) = 4 - x + 2x^2$ na base ordenada $B = (1 - x, x^2, 2 - x)$ são $(-2, 2, 3)$.
III. $\{x - 1, x^2\}$ é uma base de P_2.
IV. $\{x, x^2, x^3\}$ é uma base de P_2.

A lista completa de afirmações correctas é:

☐ I e III ☐ II e IV ☐ II e III ☐ I e II

---

7. Seja $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz de mudança de base, da base $B_1 \subset \mathbb{R}^3$ para a base B_2. Então a matriz de mudança de base, da base B_2 para a base B_1 é: **[1.5]**

☐ $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

---

8. Faça a discussão das soluções do sistema seguinte em termos dos parâmetros reais α e β. **[3.5]**

$$\begin{cases} x + y + z = \alpha \\ x + z = \beta \\ x + y + \beta^2 z = \alpha + \beta - 1, \end{cases}$$

9. Indique, justificando o valor lógico das afirmações seguintes:

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$ é um subespaço linear de $\mathbb{R}^2$. **[1.3]**

b) O núcleo da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem dimensão 1. **[1.3]**

c) Uma matriz 3×3 que tenha um zero na diagonal principal não é invertível. **[1.4]**

10. Seja A uma matriz quadrada $n \times n$ que verifica $A^2 = -I$, onde I é a matriz identidade $n \times n$.

a) Mostre que, se n é par então $\det A = \pm 1$, e se n é ímpar então $\det A = \pm i$. **[1.0]**

b) Mostre que o sistema $Ax = b$ tem solução única e determine essa solução. **[1.0]**

FIM do 1º Teste

Início do 2º Teste

11. Seja $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a projecção ortogonal sobre o eixo dos xx e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a projecção ortogonal sobre o eixo dos yy. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira **[1.5]**

☐ As funções T_1 e T_2 não são transformações lineares.
☐ $(T_1 \circ T_2)(x, y) = (T_2 \circ T_1)(x, y)$.
☐ $T_1(1, 2) = (0, 2)$
☐ As transformações lineares T_1 e T_2 são isomorfismos.

---

12. Seja $M^{2\times2}$ o conjunto das matrizes reais 2×2 e $T : M^{2\times2} \to M^{2\times2}$ definida por **[1.5]**

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b-c \\ c-b & d \end{bmatrix}$$

Considere a lista de afirmações:

I. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ pertence ao contradomínio de T.
II. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ pertence ao núcleo de T.
III. T é invertível.
IV. T não é transformação linear.

A lista completa das afirmações correctas é:
☐ II e IV ☐ I e III ☐ I e II ☐ III e IV

---

13. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear e u um vector não nulo pertencente ao núcleo de T. Considere as afirmações **[1.5]**

I. Zero é um valor próprio de T.
II. T não é sobrejectiva.
III. u é um vector próprio de T.
IV. T é um isomorfismo.
A lista completa das afirmações correctas é:

☐ I e IV ☐ III e IV ☐ I e II e III ☐ II

---

14. Seja A uma matriz diagonalizável que tem para polinómio característico $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira: **[1.5]**

☐ A dimensão do espaço próprio $E(1)$ é 1.
☐ A matriz A é invertível.
☐ Existem vectores u, v e w linearmente independentes que verificam $Au = 0$, $Av = v$ e $Aw = w$.
☐ A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ está nas condições do enunciado.

---

15. A solução do problema de valor inicial **[1.5]**

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = 3y_2 \\ y_1(0) = -1 \text{ e } y_2(0) = 3 \end{cases}$$

é:

☐ $(e^{2t} + 2e^{3t}\,,\, 3e^{3t})$. ☐ $(-e^{2t}\,,\, e^{2t} + 2e^{3t})$.

☐ $(-e^{2t}\,,\, e^{2t} + e^{3t})$. ☐ $(-e^{2t}\,,\, 3e^{3t})$.

---

16. Seja $W = L(\{(1,1,0), (-2,0,1)\}) \subset \mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual. Considere as afirmações. **[1.5]**

I. $\{(1,1,0), (-1,1,1)\}$ é uma base ortogonal para W.
II. A dimensão de $W^\perp$ é 2.
III. Uma base para $W^\perp$ é $\{(-2,2,-4)\}$.
IV. W é uma recta em $\mathbb{R}^3$.
A lista completa das afirmações correctas é:

☐ I e II ☐ I e IV ☐ II e IV ☐ I e III

---

17. Considere $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 4x_1x_2 + 3y_1y_2$. Diga qual das afirmações é correcta: **[1.5]**

☐ $\|(1,2)\| = 4$
☐ $\text{proj}_{(1,2)}(2,3) = (10, 15)$.
☐ $\theta = \arccos\langle (1,2)\,,\,(3,2) \rangle$ é o ângulo entre $(1,2)$ e $(3,2)$.
☐ $(1,2)$ é ortogonal a $(-2,1)$.

---

18. Considere o espaço vectorial real, P_3, dos polinómios de grau menor ou igual a 3 e a transformação linear $T : P_3 \to P_3$ que é representada em relação à base ordenada $B = (1, x, x^2, x^3)$ pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Determine a imagem do polinómio $1 - x$ por meio de T. **[1.5]**

b) Diga, justificando, se 0 é valor próprio de T e no caso de o ser determine uma base do subespaço próprio de T associado a 0. **[2.0]**

c) Determine uma base para a imagem de T. **[1.5]**

19. Considere a seguinte equação diferencial:

$$y'' - 4y = -5\cos t.$$

Mostre que $y(t) = \cos t$ é uma solução da equação diferencial e determine a sua solução geral. **[2]**

20. Considere $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e o subespaço linear

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x - y = 0 \text{ e } y + z = 0\right\}.$$

a) Exprima $u = (1, -1, 1)$ na forma $u = u_1 + u_2$ onde $u_1 \in W$ e $u_2 \in W^{\perp}$. **[1.5]**

b) Use o resultado da alínea anterior para calcular a distância de u a W e o elemento de W mais próximo de u. **[1]**