

Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Ambiente, Eng. Biológica
1º Semestre — 19 Out. 2005

Nome: _____
Número: _____ Curso: _____

Duração: 45 Minutos

Cotação das perguntas de escolha múltipla : Correcta: 1,5 v. Errada: -0,5v.

A preencher pelo docente:

Correctas	Erradas	TEM	PD
Nota			

1. Considere a lista das afirmações seguintes relativas à matriz

[1.5]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- I. A é uma matriz invertível.
- II. $\text{car}(A) = 3$
- III. A é uma matriz elementar.
- IV. $\text{car}(A) = 2$.

A lista completa de afirmações correctas é:

- I e II e III II e III I e III e IV I e II

2. Considere o sistema de equações lineares:

[1.5]

$$\begin{cases} x & -2y & -z & = & 1 \\ & y & -z & = & 0 \\ -2x & +4y & +2z & = & -2. \end{cases}$$

Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

- A intersecção dos três planos definidos pelas equações do sistema é um ponto.
- A solução geral do sistema é: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1 + 3z \text{ e } y = z\}$.
- A característica da matriz dos coeficientes do sistema é 3.
- A solução geral do sistema é: $\{(x, y, z) = (-2, 1, 1)\}$.

3. Considere as matrizes elementares seguintes

[1.5]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Diga qual das igualdades seguintes é verdadeira:

$$\begin{array}{ll} \square BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \square BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \square AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \square AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Justifique convenientemente todas as respostas às questões seguintes

4. Seja I a matriz identidade 2×2 , $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

- a) Calcule a matriz $(A - \alpha I)$ onde α é um escalar. [0.5]
 b) Diga para que valores de α a matriz $(A - \alpha I)$ é invertível. [1.0]
 c) Faça a discussão do sistema $(A - \alpha I)X = b$ em termos dos parâmetros reais α, b_1 e b_2 , indicando em cada caso a solução geral do sistema. [1.5]

5. Seja A uma matriz, $n \times n$, invertível que verifica $A^2 = -I$ (onde I designa a matriz identidade).

- a) Mostre que $A^{-1} = A^3$. [1.3]
 b) Mostre que $BA + BA^3 = 0$, para qualquer matriz B , $n \times n$. [1.2]