Resolução do teste de dia 19 de Outubro de 2005

1. Opção correcta: I e II.

2. Opção correcta: A solução gearal do sistema é $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1 + 3z \text{ e } y = z\}$.

3. Opção correcta: $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. a) A matriz $A - \alpha I$ é a matriz $\begin{bmatrix} 2-\alpha & 1 \\ 0 & -1-\alpha \end{bmatrix}$.

4. b) Uma matriz quadrada M de ordem n é invertível se e só se a sua característica é n.

Para $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq -1$ a matriz $A - \alpha I$ é uma matriz em escada de linhas sem linhas nulas. Logo $A - \alpha I$, tendo característica 2, é invertível.

Se $\alpha = -1$, a matriz $A - \alpha I$ tem uma linha nula enquanto que se $\alpha = 2$, $A - \alpha I$ tem uma coluna nula. Portanto em ambos os casos $A - \alpha I$ não é invertível.

Concluindo $A - \alpha I$ é invertível para todos os valores reais diferentes de 2 e -1.

4. c) Pela alínea b) a matriz $A - \alpha I$ é invertível para todo o escalar real α diferente de 2 e -1. Logo se $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq -1$ o sistema é possível e determinado, qualquer que seja o valor de b. Resolvendo o sistema para $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq -1$ obtemos a solução $(\frac{b_1}{2-\alpha} + \frac{b_2}{(1+\alpha)(2-\alpha)}, -\frac{b_2}{1+\alpha})$.

Se $\alpha = -1$, a matriz aumentada do sistema é $\begin{bmatrix} 3 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix}$, que está em escada de linhas. A matriz dos coeficientes do sistema tem característica 1. A matriz aumentada do sistema tem característica 1 se $b_2 = 0$ e característica 2 se $b_2 \neq 0$.

Logo, para $\alpha = -1$, o sistema é impossível se $b_2 \neq 0$. Se $b_2 = 0$ o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação 1. Neste caso o conjunto de soluções é $\{x, -3x + b_1) : x \in \mathbb{R}\}$.

Se $\alpha = 2$, a matriz aumentada do sistema é $\begin{bmatrix} 0 & 1 & b_1 \\ 0 & -3 & b_2 \end{bmatrix}$. Reduzindo a escada de linhas por eliminação de Gauss obtemos $\begin{bmatrix} 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 + 3b_1 \end{bmatrix}$.

A matriz dos coeficientes do sistema tem característica 1, e a matriz aumentada tem característica 1 se $b_2 + 3b_1 = 0$ e característica 2 se $b_2 + 3b_1 \neq 0$.

Logo, para $\alpha = 2$, o sistema é impossível se $b_2 + 3b_1 \neq 0$. Se $b_2 + 3b_1 = 0$ o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 1. Neste caso o conjunto de soluções é $\{(x, b_1) : x \in \mathbb{R}\}$.

5 a) Por hipótese temos $A^2 = -I$. Então pela associatividade do produto de matrizes $A^3A = A^2A^2$. Como, por hipótese $A^2 = -I$, e $(-I)(-I) = I$ pelas propriedades do produto de matrizes, obtemos $A^3A = I$. Analogamente verifica-se que $AA^3 = I$, donde, por definição de inversa de uma matriz quadrada, se tem que $A^3 = A^{-1}$.

b) Temos, pela distributividade do produto de matrizes $BA+BA^3 = BA(I + A^2)$. Como, por hipótese, $I + A^2 = 0$, temos $BA + BA^3 = 0$.