Álgebra Linear

Cursos: Química, Engenharia Química, Engenharia de Materiais, Engenharia Biológica, Engenharia do Ambiente
1º ano/1ºSemestre — 2006/07

10^{a} **Lista:**

---

1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2, 2x_1 - x_2).$$

(a) Determine o núcleo e a imagem da transformação linear.
(b) Indique um vector de $\mathbb{R}^2$ que não esteja na imagem da transformação.
(c) Verifique o teorema da dimensão.

2. Seja $v_1 = (1, 3)$, $v_2 = (-1, 4)$, e $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ a matriz que representa a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ em relação à base ordenada $B = (v_1, v_2)$.

(a) Encontre as coordenadas de $T(v_1)$ e de $T(v_2)$ na base B.
(b) Encontre as coordenadas de $T(v_1)$ e de $T(v_2)$ na base canónica de $\mathbb{R}^2$.
(c) Encontre a matriz que representa T nas bases canónicas de $\mathbb{R}^2$, e encontre uma fórmula para $T(x_1, x_2)$.
(d) Use a fórmula obtida em c) para calcular $T(1, 1)$.

3. Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^2$, a base canónica $BC = (e_1, e_2)$, e a base ordenada $\mathcal{B} = ((-1, 1), (-1, -1))$.

(a) Determine a matriz F que realiza a mudança de base de BC para $\mathcal{B}$, isto é tal que $x_{\mathcal{B}} = Fx_{BC}$.
(b) Dado um vector $u = x_1e_1 + x_2e_2$, isto é, de coordenadas (x_1, x_2) na base BC, determine as suas coordenadas (y_1, y_2) na base $\mathcal{B}$.
(c) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, cuja representação matricial na base canónica é $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Determine a matriz que representa T na base $\mathcal{B}$.

4. Seja V o espaço linear real das matrizes reais 2×2, de entradas a_{ij}, satisfazendo $a_{11}+a_{22}=0$ e $a_{12}+a_{21}=0$. Considere as seguintes matrizes de V:

$$H=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\quad J=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que H e J são linearmente independentes. Determine a dimensão e indique uma base para V.

(b) Dada a transformação linear $T:V\to V$ definida por

$$T(H)=J\ ,\ T(J)=-H\ ,$$

determine a matriz que representa T em relação a uma base que contenha H e J.

(c) Determine a dimensão do núcleo de T, e diga (justificando) se T é invertível.

5. Diga, justificando, em que casos se tem $T_1\circ T_2=T_2\circ T_1$:

(a) T_1 é a projecção ortogonal de $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ no eixo dos xx e T_2 é a projecção ortogonal de $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ no eixo dos yy;

(b) T_1 é a reflexão de $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ relativamente ao eixo dos xx e T_2 é a reflexão de $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ relativamente ao eixo dos yy;

6. Sejam $T_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ e $T_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tais que

$$T_1(x,y)=(x+y,x-y)\qquad T_2(x,y)=(2x+y,x-2y)\ .$$

Mostre que a transformação linear $T_2\circ T_1$ é um isomorfismo, e determine uma matriz que a representa.

Indique ainda a expressão geral de $T_2\circ T_1$.

7. Seja $\mathcal{M}_{2\times 2}$ o espaço das matrizes 2×2. Seja $T:\mathcal{M}_{2\times 2}\to\mathcal{M}_{2\times 2}$ a aplicação $T(A)=A+A^t$.

(a) Mostre que T é uma transformação linear.

(b) Determine a matriz K que representa T em relação à base ordenada

$$\mathcal{B}_2=\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

(c) Determine bases para o núcleo e para a imagem de T.

(d) Diga, justificando, se T é injectiva ou sobrejectiva.

(e) Determine os vectores próprios de T.

(f) Diga, justificando, se existe uma base B de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ tal que $M(T;B)$ é uma matriz diagonal. No caso de existir determine B e $M(T;B)$.

(g) Sendo $M = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ determine $T^{-1}(M)$.

Observação: *Dada uma função $f : A \to B$ e $b \in B$, define-se a imagem completa inversa de b como sendo $f^{-1}(b) = \{a \in A : f(a) = b\}$). Note que o conjunto $f^{-1}(b)$ está definido mesmo que não exista a função inversa de f.*

8. Indique o valor lógico das seguintes proposições:

(a) Existem transformações lineares injectivas de $\mathbb{R}^5$ para $\mathbb{R}^3$.
(b) Existem transformações lineares sobrejectivas de $\mathbb{R}^5$ para $\mathbb{R}^3$.
(c) Existem transformações lineares injectivas de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^5$.
(d) Existem transformações lineares sobrejectivas de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^5$.
(e) Existem transformações lineares injectivas do espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3 para o espaço das matrizes 2×2.
(f) Existem isomorfismos entre o espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 5 de coeficientes reais a uma variável e o espaço $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$
(g) Existem transformações lineares sobrejectivas do espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3 para o espaço das matrizes 2×2.
(h) Qualquer transformação linear injectiva de $\mathbb{R}^4$ para $\mathbb{R}^4$ é sobrejectiva.
(i) Qualquer transformação linear injectiva de $\mathbb{R}^4$ para $\mathbb{R}^5$ é sobrejectiva.
(j) Existe uma transformação linear bijectiva do espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3 para o das matrizes 2×2.

Exercícios de escolha múltipla

---

9. Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$T(x,y,z) = (x+1, y, 2z+x), \qquad S(x,y,z) = (2x, y-z).$$

Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

☐ S e T são transformações lineares.
☐ $S \circ T$ não é uma transformação linear.
☐ O espaço de chegada de $S \circ T$ é $\mathbb{R}^3$.
☐ T é uma transformação linear invertível.

---

10. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear e $B = (u, v, w)$ uma base ordenada para V, tal que $T(u-v) = 2u, T(2u+v) = v$ e $T(w) = u - v + w$. Então a matriz que representa T em relação à base B no espaço de partida e de chegada é:

☐ $\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-4}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

---

11. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(1,1,0) = (2,1) \qquad T(0,1,1) = (1,1) \qquad T(1,0,0) = (1,1).$$

Então,

☐ $T(x,y,z) = (x+y, x+z)$ ☐ $T(x,y,z) = (y-x, x+2z)$

☐ $T(x,y,z) = (2z+x+y, x-z)$ ☐ $T(x,y,z) = (2x, x+z)$
