Álgebra Linear

Cursos: Química, Engenharia Química, Engenharia de Materiais, Engenharia Biológica, Engenharia do Ambiente
1º ano/1ºSemestre — 2006/07

3^{a} Lista: ESPAÇOS VECTORIAIS I

Esta lista de problemas foi no essencial coligida pela Prof.ª Esmeralda Sousa Dias.

Notações: Seja A uma matriz e S um conjunto de vectores.

Núcleo de A: $\mathrm{Nuc}(A), \mathrm{Ker}(A)$ ou $\mathrm{N}(A)$.
Espaço das colunas de A: $\mathrm{EC}(A)$.
Espaço das linhas de A: $\mathrm{EL}(A)$.
Expansão linear de S ou subespaço gerado por S: $\mathrm{L}(S)$ ou $\mathrm{Span}(S)$ ou $< S >$.
Característica de A: $\mathrm{car}(A)$ ou $c(A)$ ou $\mathrm{rank}(A)$.
Dimensão de um espaço linear X: $\dim(X)$.
Coordenadas do vector x na base B: x_B.

Subespaços de $\mathbb{R}^n$

1. Determine o núcleo (espaço nulo) das seguintes matrizes:

$$(a)\ \ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad (b)\ \ B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (c)\ \ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

2. Exprima cada um dos seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear de $\mathbf{u} = (2,1,4)$, $\mathbf{v} = (1,-1,3)$ e $\mathbf{w} = (3,2,5)$.

(a) $(-9,-7,-15)$
(b) $(6,11,6)$
(c) $(0,0,0)$
(d) $(2,1,4)$.

3. Considere $\mathbf{v_1} = (2,1,0,3)$, $\mathbf{v_2} = (3,-1,5,2)$ e $\mathbf{v_3} = (-1,0,2,1)$, vectores em $\mathbb{R}^4$. Quais dos vectores seguintes pertencem à expansão linear $\mathrm{Span}(\{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3}\})$?

(a) $(2,3,-7,3)$
(b) $(0,0,0,0)$

(c) $(1, 1, 1, 1)$
(d) $(-4, 6, -13, 4)$

4. Escreva a forma geral dos vectores que pertencem à expansão linear $\mathrm{Span}(\{(\pi, 0, 2), (3, 1, -1)\})$.

5. Considere o conjunto $X = \{(t - s, t + 2s, 5t - 3s); t, s \in \mathbb{R}\}$. Mostre que existem dois vectores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ tais que $X =< v_1, v_2 >$.

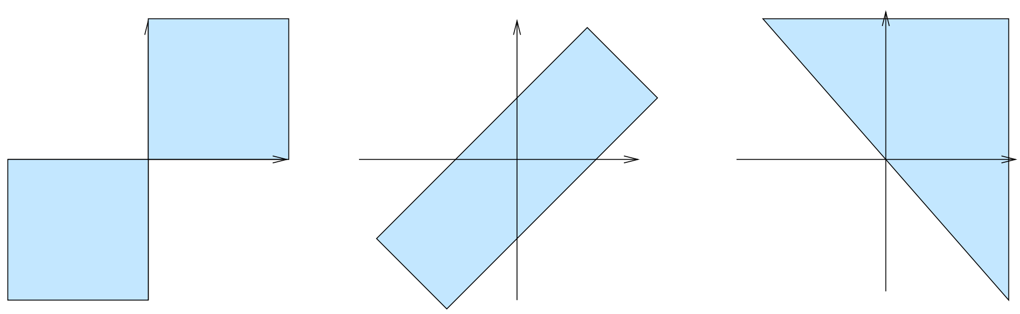
6. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são subespaços lineares de $\mathbb{R}^3$:

(a) $\{(a, 0, 0) : a \in \mathbb{R}\}$.
(b) O conjunto de vectores da forma $(a, 1, 1)$ com a real.
(c) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com $b = a + c$ e a, b, c reais.
(d) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com a, b, c inteiros.
(e) $\{(a, b, b) : a, b \in \mathbb{R}_0^+\}$
(f) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com $b = a + c + 1$ e a, b, c reais.

7. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$:

(a) O conjunto de vectores da forma $(a, 0, 0, 1)$ com a real
(b) O conjunto de soluções de um sistema linear de 3 equações a 4 incógnitas não homogéneo.
(c) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com $b = a + c - d$ e $c = 2d$, sendo a, b, c, d reais.
(d) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com a, b, c, d positivos.
(e) O conjunto de vectores da forma (a, b, c, d) com $c = a + b + 1$ e $d = 2a - b$, sendo a, b, c reais.

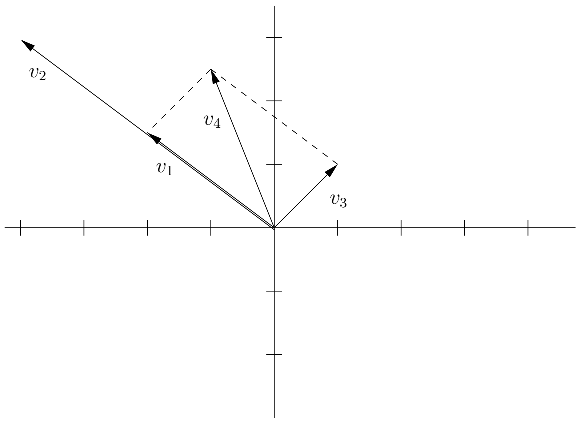
8. Para os conjuntos representados na figura justifique por que é que não são subespaços de $\mathbb{R}^2$.



9. Na figura seguinte estão indicados os vectores v_1, v_2, v_3 e v_4. Considere ainda os conjuntos seguintes

$A = \{v_1, v_2\}, \quad B = \{v_1, v_3\} \quad C = \{v_1, v_2, v_4\}, \quad D = \{v_2, v_4\}, \quad E = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}.$

Diga quais destes conjuntos gera $\mathbb{R}^2$.



10. Se possível dê exemplos de

(a) Um vector que seja combinação linear de $(1, 2, 0)$ e $(1, 0, -1)$
(b) Um vector que não seja combinação linear de $(1, 2, 0)$ e $(1, 0, -1)$
(c) Um vector de $\mathbb{R}^2$ que conjuntamente com o vector $(1, 2)$ forme um sistema linearmente independente.
(d) Um vector de $\mathbb{R}^2$ que conjuntamente com o vector $(1, 2)$ forme um sistema linearmente dependente.
(e) Um vector de $\mathbb{R}^3$ que conjuntamente com o vector $(0, 0, 0)$ forme um sistema linearmente independente.

11. Dê um exemplo de uma matriz A, 2×2, e de um vector b de $\mathbb{R}^2$ tal que b não pertença ao conjunto gerado pelas colunas de A.

12. Construa uma matriz real 3×3, que não esteja em escada de linhas, cujas colunas não gerem $\mathbb{R}^3$.

13. Seja A uma matriz real 4×4 e b um vector de $\mathbb{R}^4$ para o qual o sistema $Ax = b$ tem solução única. Explique o porquê das colunas de A gerarem $\mathbb{R}^4$.

14. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são subespaços lineares.

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$.
(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$.

(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0 \wedge x - 2y - z = 0\}$.
(d) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 2\}$.

15. Determine se os seguintes conjuntos de vectores são linearmente independentes ou não. Caso o não sejam, indique um subconjunto linearmente independente com o maior número possível de elementos e escreva os restantes como combinação linear desses vectores.

(a) Em $\mathbb{R}^4$, $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 2, 2)$, $u_3 = (1, 2, 3, 3)$ e $u_4 = (1, 2, 3, 4)$.
(b) Em $\mathbb{R}^3$, $u_1 = (0, 1, 2)$, $u_2 = (1, 0, 2)$, $u_3 = (1, 2, 0)$ e $u_4 = (1, 2, 2)$.

16. Determine a dimensão e uma base para a solução geral de cada um dos sistemas seguintes:

(a) $\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ -2x - y + 2z &= 0 \\ -x + z &= 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x + y + z + t &= 0 \\ 5x - y + z - t &= 0 \end{cases}$

17. Para cada uma das matrizes seguintes, encontre a dimensão e uma base para o espaço nulo (ou núcleo) da matriz, para o espaço gerado pelas linhas da matriz, e para o espaço gerado pelas colunas da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -8 \end{bmatrix} \; ; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

18. Utilize a informação da seguinte tabela para determinar a dimensão do espaço gerado pelas linhas da matriz A, do espaço gerado pelas colunas de A, do núcleo de A (nulidade de A) e do núcleo de A^T (matriz transposta de A).

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
A	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car A	3	2	1	2	2	0	2

19. Utilize a informação da seguinte tabela para determinar se o correspondente sistema de equações lineares não-homogéneo $AX = B$ é possível. Em caso afirmativo, indique o número de variáveis livres que entram na solução geral.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
A	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car A	3	2	1	2	2	0	2
car (A$\vdots$B)	3	3	1	2	3	0	2

20. Seja A uma matriz 4×4. Responda às questões seguintes:

(a) Se o espaço das colunas de A não é $\mathbb{R}^4$ que pode dizer a respeito do núcleo de A?
(b) Se o núcleo de A não é o subespaço $\{0\}$ que pode dizer a respeito do espaço das colunas de A?
(c) Se o espaço das colunas de A é $\mathbb{R}^4$ que pode dizer a respeito das soluções do sistema $Ax = b$ para $b \in \mathbb{R}^4$?
(d) Se o núcleo de A é $\{0\}$ que pode dizer a respeito das soluções do sistema $Ax = b$ para $b \in \mathbb{R}^4$?

21. Dada a base $\mathcal{B}$ e $x_{\mathcal{B}}$ (coordenadas de x na base $\mathcal{B}$), determine x.

$$(a) \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\},\ x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (b) \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},\ x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

22. Determine as coordenadas de x na base $\mathcal{B}$ para

$$(a) \quad x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \qquad (b)\, x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

23. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das proposições seguintes, justificando a sua resposta:

(a) O conjunto de todas as soluções de um sistema homogéneo de n equações lineares a k incógnitas é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.
(b) As colunas de uma matriz $n \times n$, invertível, formam uma base para $\mathbb{R}^n$.

24. Dê exemplos se existirem de

(a) Uma matriz 3×4 cujo núcleo tenha dimensão 3.
(b) Uma matriz 4×3 cujo espaço de linhas tenha dimensão 1.
(c) Três vectores distintos de $\mathbb{R}^4$ que gerem um subespaço de dimensão 2.

25. Considere, para cada parâmetro real α, a matriz $A_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -\alpha^2 & \alpha^2 \\ 2 & 2 & -2 & \alpha \end{bmatrix}$

(a) Determine, para cada parâmetro real α, uma base para o espaço das linhas de A_α.
(b) Diga, justificando, qual é a dimensão do núcleo de A_α e qual é a dimensão do espaço de colunas de A_α, para cada α real.
(c) Determine os valores de α para os quais $\det A_\alpha \neq 0$.
(d) Determine uma base do núcleo de A_2 e diga se o vector $(0, 2, -1, -1)$ pertence ao núcleo de A_2.

Exercícios de escolha múltipla

---

26. Seja A uma matriz $n \times p$ tal que a dimensão do núcleo de A é 2, a dimensão do núcleo de A^T é 1, e a dimensão do espaço das linhas de A é 2. Então

☐ $n = 4$ e $p = 5$. ☐ $n = 5$ e $p = 4$. ☐ $n = 3$ e $p = 4$. ☐ $n = 4$ e $p = 3$.

---

27. Para, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x - y = 0\}$, diga qual das afirmações seguintes é verdadeira

☐ V não é subespaço linear de $\mathbb{R}^3$.
☐ $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\}$ é uma base de V.
☐ $\{(1, 2, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base de V.
☐ $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (1, 3, 1)\}$ é uma base de V.

---

28. Considere $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

☐ $\{(3, 0)\,,\ (1, 2)\}$ é uma base para o espaço das colunas de A.
☐ A dimensão do espaço das linhas de A é 1.
☐ A dimensão do núcleo de A é 1.
☐ $\{(3, 0)\,,\ (1, 2)\}$ é uma base para o núcleo de A.

---

29. Para $V = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 : \ x - y = 0 \wedge w = t\}$, diga qual das afirmações seguintes é verdadeira

☐ A dimensão de V é 1.
☐ $\{(0, 0, 1, 1, 1)\,,\ (1, 1, 0, 1, 1)\,,\ (0, 0, 0, 1, 1)\}$ é uma base de V.
☐ V não é um subespaço linear de $\mathbb{R}^5$.
☐ $\{(0, 0, 0, 1, 1)\,,\ (1, 1, 0, 0, 0)\}$ é uma base de V.

---

30. Seja $B = ((1, 0, 0)(1, 1, 0)(0, 2, 1))$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Então as coordenadas de $v = (3, 1, 1)$ na base B são:

☐ $(8, -3, 1)$ ☐ $(5, -1, 1)$ ☐ $(6, -1, 1)$ ☐ $(4, -1, 1)$
