Álgebra Linear

Cursos: Química, Engenharia Química, Engenharia de Materiais, Engenharia Biológica, Engenharia do Ambiente
1º ano/1ºSemestre — 2006/07

# $4^{\text{a}}$ Lista: ESPAÇOS VECTORIAIS II

*Esta lista de problemas foi no essencial coligida pela Prof.ª Esmeralda Sousa Dias.*

**1.** Exprima a matriz $\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ como combinação linear de $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

**2.** Determine se os vectores seguintes são ou não linearmente independentes. Caso o não sejam, indique um subconjunto linearmente independente com o maior número possível de elementos.

(a) No espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3, $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = 1+t$, $p_3(t) = 1 + t + t^2$ e $p_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3$.

(b) No espaço $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem 2 com entradas reais $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$.

**3.** Diga quais dos seguintes conjuntos são subespaços vectoriais, e no caso afirmativo diga qual a sua dimensão e indique uma base.

(a) $\mathrm{W} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - w = 0 \wedge -4y + z = 0 \wedge x - w = 0\}$.

(b) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{Z} \right\}$.

(c) Em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, o conjunto das matrizes invertíveis.

(d) No espaço linear dos polinómios de variável real de grau menor ou igual a 5, o conjunto dos polinómios $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ tais que $a_0 + a_1 = 0$.

(e) Span$(S)$, onde $S$ é o subconjunto do espaço das funções reais de variável real, com as operações usuais, definido por $S = \{\cos^2(t) - \sin^2(t), \cos(2t) + \sin(t), \sin(t)\}$.

**4.** Mostre que se $U$ e $V$ são subespaços vectoriais de um espaço $W$, então $U \cap V$ e $U + V := \{u + v : u \in U, v \in V\}$ também são subespaços vectoriais de $W$. Nota: $U + V$ é, por definição, o conjunto $\{u + v : u \in U, v \in V\}$.

**5.** Seja $V$ o espaço linear dos polinómios de variável real de grau menor ou igual a 3, com as operações usuais de adição e multiplicação por um número real.

(a) Diga qual a dimensão de $V$ e indique uma base ordenada para $V$. Indique as coordenadas do polinómio $(1-t)(1+t)$ nessa base.

(b) Considere o subconjunto $S \subset V$ dado por $S = \{1-2t, 1+t^2, t, 1+2t-3t^2, t^2\}$. Diga, justificando, se $S$ é uma base para $V$.

(c) Diga qual a dimensão do espaço linear Span$(S)$, e determine uma base para esse espaço.

(d) Seja $T$ o subconjunto de todos os polinómios de $V$ que se anulam em 0. Diga se $T$ é um subespaço linear de $V$. Em caso afirmativo, indique a sua dimensão e uma base.

**6.** Seja $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) : 2a-d=0 \quad \text{e} \quad b+c=0 \right\}$. Diga, justificando quais das seguintes afirmações são correctas.

(a) $W$ é a expansão linear de $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

(b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \in W$.

(c) Sendo $U = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $V = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $(U, V)$ é uma base de $W$.

(d) Se $X$ e $Y$ pertencem a $W$ então $-X+3Y$ pertence a $W$.

**7.** Se $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos, indique a dimensão e uma base para $\mathbb{C}^3$

*a*) como espaço linear complexo. *b*) como espaço linear real.

---

Exercícios de escolha múltipla

---

**8.** Sejam $u, v, w$ vectores linearmente independentes de um espaço linear real $U$. Então:

- ☐ A dimensão de $U$ é 3.
- ☐ A dimensão de Span $(\{u, v, w, u+v\})$ é 4.
- ☐ A dimensão de Span $(\{u, v, w, u+v\})$ é igual à dimensão de Span $(\{u, v, w\})$.
- ☐ A dimensão de $U$ é inferior a 3.

---

**9.** Seja $B = (1, 1+t, 2t+t^2)$ uma base ordenada para o espaço linear dos polinómios de grau menor ou igual a 2. Então as coordenadas de $p(t) = 3+t+t^2$ na base $B$ são:

☐ $(8, -3, 1)$ ☐ $(5, -1, 1)$ ☐ $(6, -1, 1)$ ☐ $(4, -1, 1)$

---