Álgebra Linear

Cursos: Química, Engenharia Química, Engenharia de Materiais, Engenharia Biológica, Engenharia do Ambiente
1º ano/1ºSemestre — 2006/07

6ª Lista: VALORES E VECTORES PRÓPRIOS

---

1. Diga quais dos vectores seguintes são vectores próprios da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.
Em caso afirmativo, indique o valor próprio correspondente.

a) $(0,2,2)$ *b*) $(0,5,0)$ *c*) $(0,0,0)$ *d*) $(-1,-1,2)$ *e*) $(-2,-2,2)$

2. Veja se $\lambda = 3$ é ou não valor próprio de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

3. Sem efectuar cálculos determine um valor próprio de $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ e dois vectores próprios linearmente independentes.

4. Suponha que v é um vector próprio de uma matriz invertível M. Mostre que v também é um vector próprio de M^{-1} e determine o valor próprio de M^{-1} que lhe está associado.

5. Suponha que a matriz M tem um vector próprio v associado a um valor próprio λ. Mostre que v é um vector próprio de M^2 associado ao valor próprio λ^2.

6. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

1. Podem-se calcular valores próprios de matrizes de qualquer tipo.
2. Uma matriz de ordem n tem sempre n valores próprios diferentes.
3. Qualquer vector de $\mathbb{R}^n$ pode ser vector próprio de uma matriz A de ordem n.
4. Duas matrizes com o mesmo polinómio característico são iguais.

5. Um polinómio de grau 2 pode ser o polinómio característico de uma matriz de ordem 3.

7. Se possível, dê exemplos de:

1. Uma matriz de ordem quatro que admita o valor próprio 0.
2. Uma matriz A de ordem quatro tal que $(0,0,0,0)$ seja vector próprio de A.
3. Uma matriz cujo polinómio característico seja $x^2 - 3x$.
4. Uma matriz não nula de ordem 5 que tenha 0 como único valor próprio.
5. Uma matriz de ordem quatro que admita o valor próprio 3 com multiplicidade algébrica dois e o valor próprio 2 com multiplicidade algébrica três.

8. Para cada uma das matrizes seguintes A encontre os valores próprios e bases para os espaços próprios correspondentes. No caso de serem diagonalizáveis determine ainda uma matriz D e uma matriz S tal que $D = S^{-1}AS$.

$$a)\ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} c)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad d)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Justifique, sem fazer cálculos, que A admite o valor próprio 0.

b) Determine os valores próprios de A.

c) Determine os vectores próprios associados ao valor próprio 2.

10. Mostre que para uma matriz A, 2×2, a equação característica é dada por

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0,$$

onde $\mathrm{tr}(A)$ designa o traço de A (chama-se **traço** de uma matriz quadrada A, $tr\,(A)$, à soma dos elementos da diagonal principal de A.).

Diga ainda qual o valor de $\mathrm{tr}(A)$ e $\det(A)$ se $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 8$ são os valores próprios de uma matriz A, 2×2.

11. Entre as matrizes dadas, determine quais as que são diagonalizáveis. Em caso afirmativo encontre uma matriz S que diagonalize a matriz dada A (ou seja tal que $S^{-1}AS$ é diagonal).

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *b*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *c*) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ *d*) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

12. Um dos teoremas fundamentais da Álgebra Linear é o teorema de Cayley-Hamilton que diz que uma matriz quadrada A verifica a sua equação característica. Isto é, se

$$a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0$$

é a equação característica de A, então também se verifica

$$a_0 I + a_1 A + \cdots + a_{n-1}A^{n-1} + A^n = 0.$$

a) Verifique o Teorema de Cayley-Hamilton para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Este teorema pode ser usado para calcular as potências de uma matriz de forma recursiva. Deduza a fórmula de recorrência para uma matriz A, 2×2. Use esta fórmula para calcular A^3 onde A é a matriz da alínea anterior.

13. Seja $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz que verifica simultaneamente:

(i) $A \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ (ii) $A \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$

(iii) Se $X \in \{\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T \in M_{3\times 1}(\mathbb{R}) : a = 3c \quad \text{e} \quad b = -c\}$ então $AX = 0$

a) Indique os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.
b) Indique o polinómio característico de A.
c) Calcule A^{47}.

14. Seja A uma matriz de ordem n em que a soma das entradas de cada linha é uma constante k. Mostre que k é valor próprio de A.

15. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0.97 & 0.05 \\ 0.03 & 0.95 \end{bmatrix}$ cuja soma por colunas é constante, e o vector $x_0 = A = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix}$.

a) Use o problema anterior e as propriedades dos determinantes para justificar que $\lambda = 1$ é um valor próprio de A. Mostre ainda que $\lambda = 0.92$ é também um valor próprio de A.

b) Mostre que $u = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ são vectores próprios de A, indicando quais os valores próprios associados.

c) Escreva o vector de coordenadas (c_1, c_2) de x_0 em relação à base (u, v).

d) Dada a sucessão $x_{k+1} = Ax_k$ $(k = 0, 1, 2, ...)$, mostre que pode escrever $x_{k+1} = c_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2(0.92)^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

e) Use os resultados anteriores para determinar o limite : $\lim\ _{k\to\infty} x_{k+1}$.

16. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix}$$

a) Verifique que A é diagonalizável e determine uma matriz diagonal D e uma matriz P invertível tal que $D = P^{-1}AP$.

b) Justifique que A é invertível e calcule A^{-1}.

c) Calcule A^{25} e encontre os seus valores próprios e bases para os espaços próprios.

17. Um subespaço $S \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se um subespaço invariante para uma função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se a imagem de S por F está contida em S, isto é $F(S) \subseteq S$.

Considere a função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $F(x) = Ax$, onde A é uma certa matriz real $n \times n$.

a) Mostre que os subespaços próprios de valores próprios reais são subespaços invariantes.

b) Considere $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Determine subespaços invariantes para F.

c) Verifique que a função F da alínea anterior representa uma reflexão em relação à recta $y = x$. Represente geométricamente os subespaços invariantes que encontrou na alínea anterior, e diga se existem outros subespaços invariantes para F.

18. Para uma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

a) Se $\mathbb{R}^n$ tem uma base constituída por n vectores próprios de A, então A é diagonalizável.

b) Se A tem n vectores próprios distintos, então A é diagonalizável.

c) Se A é diagonalizável, então A tem n valores próprios distintos.

d) Se A é diagonalizável, então é invertível.

e) Se A é diagonalizável em $\mathbb{R}$, então tem n valores próprios reais contando as suas multiplidades algébricas.

f) Se A tem n valores próprios reais ou complexos contando as suas multiplidades algébricas, então A é diagonalizável em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

g) Se A tem característica menor do que n, então A tem pelo menos um valor próprio real.

h) Se A tem o valor próprio 1 com subespaço próprio de dimensão $n-2$ e a característica de A é $n-2$, então A é diagonalizávelem $\mathbb{R}$.

i) Se $EC(A) \neq \mathbb{R}^n$, então A tem pelo menos um valor próprio real.

---

19. Seja A uma matriz quadrada de ordem n admitindo n valores próprios distintos, dos quais um é zero. Assinale o valor lógico das afirmações:

- ☐ O sistema $AX = 0$ é determinado.
- ☐ Todos os valores próprios de A têm multiplicidades algébrica e geométrica iguais.
- ☐ A é uma matriz diagonal.
- ☐ A^5 não é invertível.

---

20. Seja A uma matriz diagonalizável. Assinale o valor lógico das afirmações:

- ☐ A tem n valores próprios distintos.
- ☐ Cada valor próprio de A tem multiplicidade algébrica igual à geométrica.
- ☐ É possível encontrar n vectores próprios de A que sejam colunas de uma matriz invertível.
- ☐ Para cada valor próprio λ de A, $n - car\,(A - \lambda I_n) =$ multiplicidade algébrica de λ.

---

21. Seja A uma matriz diagonalizável cujo polinómio característico é $p(x) = -x(4-x)^2$. Complete as afirmações:

1. Os valores próprios de A são......, com multiplicidade algébrica...... e ......, com multiplicidade algébrica......
2. $\det(A) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
3. A matriz $\begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}$ está nas condições do enunciado.

Exercícios de escolha múltipla

---

22. Sejam u, v e w vectores não nulos de $\mathbb{R}^3$ e A uma matriz 3×3 tal que $Au = 2u$, $Av = 0$ e $Aw = w$. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

☐ $B = (u, v, w)$ não é uma base de $\mathbb{R}^3$.
☐ A matriz A não é invertível.
☐ A matriz A não é diagonalizável.
☐ $\lambda = 1$ não é um valor próprio de A.

---

23. Seja $A = [a_{ij}]_{i,j=1,2}$ uma matriz real , 2×2, tal que $a_{11} + a_{22} = 0$ e $\det(A) = 1$. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

☐ Zero é um valor próprio de A.
☐ O polinómio característico de A é $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$
☐ A matriz A não tem valores próprios complexos.
☐ 1 e -1 são valores próprios de A.
