Álgebra Linear

Cursos: Química, Engenharia Química, Engenharia de Materiais, Engenharia Biológica, Engenharia do Ambiente
1º ano/1ºSemestre — 2006/07

7^{a} Lista: PRODUTO INTERNO I

Nos exercícios onde não é especificado o produto interno considere o produto interno usual.

1. Considere os vectores $\mathbf{u} = (4, 1, -2)$ e $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$ de $\mathbb{R}^3$. Calcule

a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ *b)* $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ *c)* $\|-3\mathbf{u}\|$ *d)* $\dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ *e)* $\left\|\dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}\right\|$

e o ângulo entre os vectores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

2. Para que valores de k podemos afirmar que $\|k\mathbf{v}\| = 5$ com $\mathbf{v} = (-2, 3, 0, 6)$?

3. Para que valores de k podemos afirmar que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais?
(a) $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 7, k)$. (b) $\mathbf{u} = (k, k, 1)$, $\mathbf{v} = (k, 5, 6)$.

4. Verifique a desigualdade de Cauchy–Schwarz para os vectores $\mathbf{u} = (0, -2, 2, 1)$ e $\mathbf{v} = (-1, -1, 1, 1)$.

5. Encontre dois vectores com norma igual a um que sejam ortogonais aos seguintes três vectores: $\mathbf{u} = (2, 1, -4, 0)$, $\mathbf{v} = (-1, -1, 2, 2)$ e $\mathbf{w} = (3, 2, 5, 4)$.

6. Determine a expressão geral de todos os vectores ortogonais a $(2, 3, 4, -5)$ e $(1, 0, 3, -1)$ simultaneamente.

7. Se possível dê exemplos de:
a) Dois vectores de $\mathbb{R}^5$ cujo produto interno seja $\sqrt{2}$.
b) Três vectores u, v, w de $\mathbb{R}^3$ tais que $u|v = -2$, $u|w = 1$ e $u|(v + w) = 3$.
c) Um vector de $\mathbb{R}^4$ cuja norma seja $\sqrt{\pi}$.
d) Um vector v de $\mathbb{R}^2$ tal que $v|v = -2$.
e) Dois vectores distintos u, v de $\mathbb{R}^3$ tais que $u|u = v|v = 0$.
f) Um vector u de $\mathbb{R}^3$ tal que $u|u = 3$ e $u|5u = 75$.

8. Designe por $\text{proj}_v\, u$ a projecção ortogonal do vector u sobre o vector v. Calcule:
a) $\text{proj}_{(1,2)}(-1, -1)$; b) $\text{proj}_{(1,2,3)}(-\pi, -2\pi, -3\pi)$ c) $\text{proj}_{(1,2,3)}(-2000, 1000, 0)$.

9. Sejam $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ e $v = (\frac{2}{\sqrt{k}}, \frac{2}{\sqrt{k}})$. Diga para que valores de $k \neq 0$ o conjunto $\{u, v\}$ é
a) um conjunto ortogonal ; b) um conjunto ortonormado.

10. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Sem efectuar quaisquer cálculos, justifique se são verdadeiras ou falsas as afirmações:
- $\dim EL(A) + \dim N(A^T) = 4$.
- $\dim EC(A) + \dim N(A^T) = 4$.

(b) Determine uma base para o complemento ortogonal do núcleo de A.
(c) Determine uma base para o complemento ortogonal do núcleo de A^T.

11. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $\mathbf{u_1} = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{u_2} = (\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5})$ Exprima $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$ na forma $\mathbf{w} = \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}$, em que $\mathbf{w_1} \in W$ e $\mathbf{w_2} \in W^\perp$.

12. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^2$ dado pela equação $y = 2x$. Determine $W^\perp$. Qual a distância do vector $(1, -1)$ aos subespaços W e $W^\perp$, respectivamente?

13. Encontre uma base para o complemento ortogonal do subespaço U, gerado pelos vectores $(1, 1, -1, -1, 1), (1, 2, 3, 4, 1), (2, 1, -6, -7, 1)$.

---

14. Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ vectores de $\mathbb{R}^2$.

a) Mostre que $\mathbf{u}|\mathbf{v} = 3u_1v_1 + 5u_2v_2$ define um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

b) Considerando definido em $\mathbb{R}^2$ o produto interno da alínea anterior, calcule $\|\mathbf{u}\|$ e $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, onde $\mathbf{u} = (-1, 3)$ e $\mathbf{v} = (2, 5)$. Repita os cálculos para o produto interno usual.

15. Sejam $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Verifique em que casos as expressões seguintes definem um produto interno em $\mathbb{R}^3$. Nos casos em que não está definido um produto interno, indique as propriedades que não são satisfeitas.
a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_3v_3$ *b)* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$
c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3$ *d)* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$