Álgebra Linear

Cursos: Química, Engenharia Química, Engenharia de Materiais, Engenharia Biológica, Engenharia do Ambiente

1º ano/1ºSemestre — 2006/07

---

# 8ª Lista:

---

| |
|---|
| `Nos exercícios em que não se especifica qual é o produto interno, considere o produto interno usual (Euclideano) de` $\mathbb{R}^n$. |

**1.** Considere o hiperplano de $\mathbb{R}^4$

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 2z - 2w = 0\} \ .$$

a) Use o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt para construir uma base ortonormada para $W$.

b) Determine uma base para o subespaço linear $W^{\perp}$, e escreva equações cartesianas para $W^{\perp}$.

c) Exprima o vector $\mathbf{w}$=(1,2,1,-1) como

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \ ,$$

onde $\mathbf{w}_1 \in W$ e $\mathbf{w}_2 \in W^{\perp}$.

d) Calcule as distâncias $\mathrm{d}((1, 2, 1, -1), W)$ e $\mathrm{d}((1, 2, 1, -1), W^{\perp})$.

**2.** Encontre uma base para o complemento ortogonal do subespaço $U$, dado por

(a) $U = L\left((1, 1, -1, -1, 1), (1, 2, 3, 4, 1), (2, 1, -6, -7, 1)\right)$.
(b) $U = ((1, 2, 3, 4), (2, 4, 6, 8))$.

**3.** Seja $W$ o plano de $\mathbb{R}^3$ definido pela equação $x - 2y + z = 0$. Encontre uma equação para $W^{\perp}$.

**4.** Seja $W$ a recta de $\mathbb{R}^3$ definida pelas equações paramétricas $x = 2t, y = -t, z = 4t$ $(-\infty < t < \infty)$. Determine uma equação para $W^{\perp}$.

**5.** Uma matriz real $A$ de ordem $n$ diz-se ortogonal se $A^T A = I$.

a) Prove que uma matriz real $A$ de ordem $n$ é ortogonal se e só se as colunas de $A$ formam uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$.

b) Determine todas as matrizes ortogonais de ordem 2.

c) Mostre que se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um valor próprio de uma matriz ortogonal, então $|\lambda| = 1$.

**6.** Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ diz-se ortogonalmente diagonalizável se existir uma matriz ortogonal $P \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $P^T AP$ é uma matriz diagonal.

a) Mostre que se $A$ é ortogonalmente diagonalizável então $A$ é simétrica.

b) Mostre que se $u, v$ são vectores próprios de uma matriz simétrica real associados a valores próprios distintos então $u$ e $v$ são ortogonais.

c) É possível demonstrar que

*Toda a matriz simétrica real é diagonalizável em* $\mathbb{R}$*.*

Utilize este resultado e as alíneas anteriores para mostrar o seguinte:

**Teorema:** *Uma matriz* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *é ortogonalmente diagonalizável se e só se* $A$ *é simétrica.*

d) Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ diagonalize $A$ por meio de uma matriz ortogonal.

**7.** Mostre que para uma matriz real $A$, $n \times k$, se tem a seguinte igualdade entre núcleos:

$$N(A) = N(A^T A).$$

**8.** Mostre que para uma matriz real $A$, $n \times k$, a matriz $A^T A$ é invertível se e só se as colunas de $A$ forem linearmente independentes.

**9.** Seja $A$ uma matriz real $n \times k$ tal que $A^T A = 0$. Mostre que $A$ é a matriz nula $n \times k$.

**10.** Seja $A$ uma matriz real $n \times k$ cujas colunas formam uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$. Diga, justificando se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) $k = n$;

b) 0 é valor próprio de $A^T A$;

c) $A$ é uma matriz ortogonal;

d) $A^T A$ é uma matriz diagonalizável em $\mathbb{R}$;

e) para todo o vector $v \in \mathbb{R}^n$, $\text{proj}_{EC(A)} v = v$;

f) a matriz $A^T A$ não tem zeros na diagonal principal.

**11.** Sejam $A$ uma matriz real $5 \times 6$ e $B$ uma matriz real $6 \times 8$ tais que $AB = 0$. Mostre que $c(A) + c(B) \leq 6$.

## Mínimos quadrados

**12.** Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calcule $Au$ e $Av$ e compare estes vectores com $b$. Diga se $u$ pode ou não ser uma solução de mínimos quadrados para a equação $Ax = b$?

**13.** Determine todas as soluções de mínimos quadrados para a equação $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

**14.** Determine todas as soluções de mínimos quadrados do sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

**15.** Indique, justificando, o valor lógico das afirmações seguintes:

(a) Uma solução de mínimos quadrados para $Ax = b$ é um vector $x^*$ tal que $\|b - Ax\| \leq \|b - Ax^*\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
(b) Se as colunas de $A$ são linearmente independentes então a equação $Ax = b$ tem solução de mínimos quadrados única.
(c) Uma solução de mínimos quadrados para $Ax = b$ é um vector do espaço das colunas de $A$ mais próximo de $b$.

**16.** Seja $P$ uma matriz simétrica tal que $P^2 = P$ (uma matriz deste tipo designa-se por matriz de projecção ou matriz de projecção ortogonal). Para um vector $b \in \mathbb{R}^n$ considere $b^* = Pb$ e o vector $z = b - b^*$.

(a) Mostre que $z$ é ortogonal a $b^*$.

(b) Mostre que $b$ é a soma de um vector do espaço das colunas de $P$ ($EC(P)$) com um vector de $EC(P)^{\perp}$. Diga porque razão isto mostra que $Pb$ é a projecção ortogonal de $b$ sobre o espaço das colunas de $P$.

**17.** Determine a equação da recta de mínimos quadrados, $y = \alpha + \beta x$ que melhor se ajusta aos dados: $(2,3),(2,5),(6,4),(8,1)$.

**18.** Determine o polinómio cúbico que melhor se ajusta aos pontos

$$(-1,10),(0,-4),(1,-2),(2,1),(3,10).$$

---

**19.** Dê exemplos, se possível, das instâncias abaixo. Se não existirem exemplos justifique porquê.

a) Uma matriz $A$ $2 \times 3$ tal que $(1,1,1)$ pertença a $EL(A)^{\perp}$e tal que dim $EC(A^T) = 1$;

b) Uma matriz $A$ $4 \times 5$ tal que $(1,1,1,1) \in EC(A)$ e 50 seja valor próprio de $A$.

c) Uma matriz $A$ $3 \times 3$ tal que $(1,1,1)$ seja vector próprio de $A$ associado ao valor próprio 0 e tal $(1,1,1) \in EL(A)$

d) Um subespaço $W$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $proj_W(1,1,0) = (1,0,0)$

e) Uma matriz $A$ tal que $(1,2,3)$ seja vector próprio de $A$.

**20.** Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) Toda a matriz ortogonal é diagonalizável em $\mathbb{R}$.

b) Dados dois vectores $u, v$ não nulos de $\mathbb{R}^4$ tais que $S = \{u, v\}$ é um conjunto ortonormado, é possível completar $S$ para obter uma base ortonormada de $\mathbb{R}^4$.

c) Dado um vector $v$ não nulo de $\mathbb{R}^n$ existe sempre uma base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ que contem $v$.

d) É possível completar a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 2 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$ de forma a $A$ ser uma matriz ortogonal.

e) É possível completar a matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & * & 0 \\ * & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}$ de forma a $A$ ser uma matriz ortogonal.

---

Exercícios de escolha múltipla

---

**21.** Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - y + z = 0\}$. Para o produto interno usual, uma base ortogonal para $W$ é

☐ $\{(-1/2, 1/2, 1)\}$
☐ $\{(1, 1, -2)\,,\,(-1, 1, 0)\}$
☐ $\{(1, 1, 0)\}$
☐ $\{(1, 1, 0)\,,\,(-1/2, 1/2, 1)\}$

---

**22.** Considere $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual e os vectores seguintes:

$$u = (2, 1, 1, 1) \quad \text{e} \quad v = (1, 0, -1, -1),$$

Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira.

☐ $\|v\| = 1$
☐ O ângulo entre $u$ e $v$ é zero graus.
☐ $u$ e $v$ são ortogonais.
☐ A distância de $u$ a $v$ é 5.

---

**23.** Seja $A$ uma matriz real $3 \times 4$ tal que o núcleo de $A^T$ tem dimensão 2 (i.e. $\dim N(A^T) = 2$). Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira.

☐ O complemento ortogonal de $N(A^T)$ tem dimensão 1.
☐ O complemento ortogonal de $N(A)$ tem dimensão 2.
☐ O núcleo de $A$ tem dimensão 1.
☐ O complemento ortogonal do espaço das linhas de $A$ tem dimensão 2.

---

**24.** Considere $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno $\langle x\,,\,y\rangle = x^T A\, y$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $x, y \in \mathbb{R}^2$ são vectores coluna.

(a) Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira:

☐ Os vectores $(1, 1)$ e $(-1, 1)$ formam uma base ortogonal para $\mathbb{R}^2$.
☐ Os vectores $(1, \frac{-1}{2})$ e $(1, 1)$ formam uma base ortogonal para $\mathbb{R}^2$.
☐ Os vectores $(1, \frac{-1}{2})$ e $(1, 1)$ formam uma base ortonormada para $\mathbb{R}^2$.
☐ Os vectores $(1, 1)$ e $(-1, 1)$ formam uma base ortonormada para $\mathbb{R}^2$.

(b) Designe por $\text{proj}_v u$ a projecção ortogonal de $u$ sobre $v$ para o produto interno dado. Então

☐ $\text{proj}_{(1,1)}(1, 0) = \frac{2}{3}(1, 0)$
☐ $\text{proj}_{(1,0)}(1, 1) = \frac{2}{3}(1, 0)$
☐ $\text{proj}_{(1,0)}(1, 1) = (1, 1)$
☐ $\text{proj}_{(1,1)}(0, 1) = \frac{2}{3}(1, 1)$

---

**Exercícios de revisão**

---

**25.** Considere o espaço vectorial real $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas, munido das operações habituais, e a seguinte lista de afirmações:

I) $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é um espaço vectorial de dimensão 2.

II) O conjunto $\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{Z}\}$ é um subespaço vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

III) O conjunto $\{M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : M = M^t\}$ é um subespaço vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

A lista completa de afirmações correctas é
**A)** II e III **B)** III **C)** I e II e III **D)** I e II

---

**26.** Considere o espaço vectorial real $P_2$ dos polinómios de grau menor ou igual a 2, munido das operações habituais, e a seguinte lista de afirmações:

I) A dimensão de $P_2$ é 3.

II) O conjunto $\{p(x) \in P_3 : p(0) = 2\}$ é um subespaço vectorial de $P_3$

III) Sendo $v_1 = 3 + x, v_2 = x - x^2, v_3 = 2 + x, v_4 = 1 + x + x^2$, o conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é linearmente independente.

A lista completa de afirmações correctas é
**A)** I e II e III **B)** I e II **C)** I **D)** III

---

**27.** Seja $r$ a recta de $\mathbb{R}^5$ definida por $r = (1, 0, 0, 2, 1) + \big\langle(1, 5, 0, 0, 0)\big\rangle$ e $H$ o hiperplano definido pela equação $x_4 - x_5 = 6$ e
$W = \{(x_1, ..., x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = 1 \text{ e } x_4 - x_5 = 3\}$. Assinale as afirmações correctas:

☐ O ponto $P = (1, 2, 20, 26, 20)$ pertence a $H$. ☐ O ponto $P = (1, 2, 20, 26, 20)$ pertence a $W$.
☐ A recta $r$ é paralela a $W$ ☐ $W$ é um 3-plano.
☐ A recta $r$ está contida em $H$. ☐ $H$ contém uma recta paralela a $r$.
☐ $W$ é paralelo a $H$
☐ Há pelo menos um ponto que pertence a $r$ e $W$ simultaneamente.
☐ Para definir $r$ por um sistema de equações cartesianas são necessárias pelo menos 4 equações.