Álgebra Linear

Cursos: Química, Engenharia Química, Engenharia de Materiais, Engenharia Biológica, Engenharia do Ambiente
1º ano/1ºSemestre — 2006/07

9ª **Lista:**

---

1. Diga, justificando, quais das seguintes funções são transformações lineares.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 3x_1 - x_2)$
(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (1 + x_2, 3x_1 - 1)$.
(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 - 4x_3)$.
(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2x_3, 3x_2^2, x_1 - 4x_3)$.
(e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2x_3, 5x_2^2)$.
(f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 3x_2, x_1 + 5x_2)$.
(g) $T : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $T(A) = \det A$, para toda a matriz $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$.
(h) $T : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = A + A^T$ para toda a matriz $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$.
(i) Sendo V o espaço linear dos polinómios de variável real de grau menor ou igual a 3, $T : V \to V$ tal que $T(p(t)) = (p(t))'$.

2. Seja $T : U \to V$ uma transformação linear, U e V espaços lineares.

(a) Mostre que $T(0) = 0$.
(b) Conclua que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, onde $T(x, y) = (2x - y, x + y + 1, x)$, não é uma transformação linear.

3. Considere os vectores v_1, v_2 e v_3 do espaço linear W, e $T : W \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(v_1) = (1, -1, 2)$, $T(v_2) = (0, 3, 2)$, $T(v_3) = (-3, 1, 2)$. Determine $T(3v_1 - v_2 + 10v_3)$.

4. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, tal que $T(v) = Av$ onde A é a matriz $\begin{bmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Determine uma base para o núcleo de T e uma base para a imagem de T.

(b) Mostre que o vector $(0, 2, 0, 0)$ não pertence à imagem de T, e determine qual é o vector v de $\mathbb{R}^3$ tal que a distância de $T(v)$ a $(0, 2, 0, 0)$ é a menor possível.

5. Seja A uma matriz ortogonal de ordem 3 e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $T(v) = Av$. Mostre que $u|v = T(u)|T(v)$, para todo o vector V de $\mathbb{R}^3$.

6. Sejam V e W dois espaços vectoriais reais e $B = (e_1, ..., e_n)$ e $C = (g_1, ...g_m)$ bases de V e W respectivamente, e seja ainda $T : V \to W$ uma transformação linear.

(a) Mostre que para qualquer vector $v \in V$ tal que $v_B = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ se tem $(T(v))_C = \lambda_1 T(e_1)_C + \lambda_2 T(e_2)_C + ... + \lambda_n T(e_n)_C$.

(b) Sendo A a matriz $m \times N$ cuja coluna i é $T(e_i)_C$, mostre que para qualquer vector $v \in V$ tal que $v_B = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ se tem

$$T(v)_C = A(v_B)$$

Definição A é a matriz que representa a transformação linear T em relação à base B no espaço de partida e à base C no espaço de chegada. Costuma-se indicar $A = M(T; B, C)$.

7. Sendo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a reflexão na recta $y = x$ e $B = (1, 1), (1, -1)$ determine $M(T; B, b.c.)$ e $M(T; B, B)$, onde *b.c.* indica a base canónica de $\mathbb{R}^2$.

8. Determine a matriz que representa cada uma das transformações lineares abaixo, em relação à base canónica no espaço de partida e à base canónica no espaço de chegada.

(a) $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.
(b) $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$.
(c) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)$.
(d) $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0)$.
(e) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_3, x_2, x_1 - x_3)$.

9. Defina cada uma das transformações lineares T seguintes na forma $T(X) = AX$, onde A é uma matriz. Use a matriz A para obter as imagens por T do triângulo I de vértices $(-1, 2), (0, 0)$ e $(1, 1)$, onde T é :

(a) A reflexão em relação ao eixo dos xx ;
(b) A projecção ortogonal sobre a recta $y = -x$.