Álgebra Linear

Cursos: Química, Engenharia Química, Engenharia de Materiais,Engenharia Biológica, Engenharia do Ambiente
1º ano/1ºSemestre — 2006/07

1^{a} Lista: SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E ÁLGEBRA DE MATRIZES

Esta lista de problemas foi no essencial coligida pela Prof.ª Esmeralda Sousa Dias.

Sistemas de equações lineares

1. Quais das seguintes equações são equações lineares em x, y e z?

a) $x+5y-\sqrt{2}z=1$ b) $x^{-2}+y-3z=-3$ c) $x=-2y+\pi$
d) $x+5y+\cos z=0$ e) $x+5y-\sqrt{2z}=1$

2. Determine a equação da parábola, $y=ax^2+bx+c$, que passa pelos pontos $(1,3),(2,4)$ e $(-1,1)$.

3. Use os resultados do problema anterior para determinar o polinómio p de grau menor ou igual a dois, que toma os valores indicados na tabela seguinte

x	1	2	-1
$p(x)$	3	4	1

4. Diga para que valores de α e de β o sistema seguinte é possível:

$$\begin{cases} -2x + 10y = \alpha \\ 8x - 40y = \beta \end{cases}$$

5. Sem efectuar cálculos, diga quantas soluções tem o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad -10^{12}x_3 + \pi x_4 = e^2 \\ \pi^\pi x_2 \qquad x_4 = 10 \\ x_3 + 3.5x_4 = 20 \\ 0.10x_4 = \pi^\pi \end{cases}$$

6. Sem efectuar cálculos, determine quais dos seguintes sistemas de equações lineares homogéneos têm solução não-trivial. Justifique.

(a) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z - w = 0 \\ 7x + y - 8z + 9w = 0 \\ 2x + 8y + z - w = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ y - 8z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

7. Considere as rectas $x - y = 10$ e $x + 2y = 4$. Diga se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

(a) As rectas intersectam-se no ponto $(100, 90)$.
(b) O ponto $(100, 90)$ pertence a uma das rectas e não é ponto de intersecção das duas rectas.
(c) As rectas são paralelas.

8. Complete a igualdade

$$\begin{bmatrix} -10 & 1 \\ \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square \\ 3 \end{bmatrix}.$$

por forma a que esta equação tenha como solução a recta $y = mx + b$ que passa pelos pontos $(-10, 1)$ e $(2, 3)$. Indique ainda a equação desta recta.

9. Sendo i a unidade imaginária (i.e. $i^2 = -1$), diga se $(z_1, z_2) = (2 - 3i, 1 - i)$ é ou não solução do sistema:

$$\begin{cases} z_1 & - & z_2 & = & 1 - 2i \\ & & (1+i)z_2 & = & 2. \end{cases}$$

10. Quais das seguintes matrizes 3×3 são matrizes em escada por linhas? Indique as respectivas características.

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad d)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad f)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad g)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad h)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$i)\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad j)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad k)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad l)\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

11. Determine a característica de cada uma das matrizes seguintes (i denota a unidade imaginária $\sqrt{-1}$):

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} -1 & 1+2i \\ -3+i & 5+5i \end{bmatrix}$$

12. Considere as seguintes matrizes aumentadas em escada de linhas. Resolva cada um dos respectivos sistemas de equações lineares.

$$(\mathrm{a}\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \qquad (\mathrm{b})\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

13. Construa 3 matrizes aumentadas para um sistema de equações lineares cuja solução geral seja $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 5$.

14. Resolva cada um dos sistemas de equações lineares, utilizando o Método de Eliminação de Gauss.

$$(a)\ \begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} x - y + 2z - w = -1 \\ 2x + y - 2z - 2w = -2 \\ -x + 2y - 4z + w = 1 \end{cases}$$

15. Faça a discussão de cada um dos seguintes sistemas de equações lineares nas variáveis x, y, z em função dos respectivos parâmetros e determine a solução geral em caso

$$(a)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & & & = & -3 \\ & & & & az & = & 0 \\ x & - & 5y & - & 5z & = & b \end{array}\right. \qquad (b)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \alpha x & + & & & \beta z & = & 2 \\ \alpha x & + & \alpha y & + & 4z & = & 4 \\ & & \alpha y & + & 2z & = & \beta \end{array}\right.$$

$$(c)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & & - & 2z & = & 0 \\ & & cy & + & 4z & = & d \\ 4x & + & 5y & - & 2z & = & -2 \end{array}\right. \qquad (d)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 4 \\ & & & & z & = & 2 \\ & & & & (a^2-4)z & = & a-2 \end{array}\right.$$

Cálculo Matricial

16. Escreva a matriz $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\cdots,4}$ definida por:

$$(a)\ a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ -1 & \text{se } i = j+1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad (b)\ a_{ij} = i^2 \qquad (c)\ a_{ij} = \begin{cases} -a_{ji} & \text{para todo } i, j \\ j & \text{para } j > i \end{cases}$$

17. Complete a igualdade:

$$\begin{bmatrix} 10 & 200 & 0.5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ -1 \\ \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$$

18. Calcule, se possível, os produtos AB e BA, quando:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \sqrt{2} \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \pi \\ \sqrt{3} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 2-3\mathrm{i} \end{bmatrix}$

19. Para cada par de matrizes A e B abaixo indicadas determinar, caso estejam definidas, as matrizes $A+2B$, $A-B$, A^2, B^2, AB e BA.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = [2]$ e $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

20. Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule: (AB), $(AB)^T$, $B^T A^T$ e $A^T B^T$.

21. Sejam A uma matriz 4×5, B uma matriz 4×5, C uma matriz 5×2, D uma matriz 4×2 e E uma matriz 5×4 . Determine quais das seguintes expressões matriciais estão bem definidas, e nesses casos, indique o tipo da matriz resultante.

(a) BA (b) $AC + D$ (c) $AE + B$ (d) $AB + B$

(e) $E(A + B)$ (f) $E(AC)$ (g) $E^T A$ (h) $(A^T + E)D$

22. Considere uma função definida por $f(x) = Ax$, que aplica o vector $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ no vector $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e o vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ no vector $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$. Determine a matriz A e use-a para calcular $f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$.

23. Obtenha uma fórmula para A^n, onde A é a seguinte matriz:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$

24. Dê exemplos sempre que possível, de matrizes quadradas A e B que verifiquem as condições abaixo indicadas. Caso não seja possível, justifique porquê.

(a) $AB = BA \neq 0$.
(b) $AB \neq BA$.
(c) $AB = 0$ e $BA \neq 0$.
(d) $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.
(e) $AB = 0$ e $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

25. Seja B uma matriz 3×3 cuja 3ª coluna é $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Complete as afirmações:

(a) A 3^a coluna de AB é ....
(b) $X = Ab$ é uma combinação linear das colunas de A com coeficientes...............................

26. Considere os vectores:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Verifique se b é combinação linear de u_1, u_2 e u_3.

Inversão de matrizes

27. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Encontre matrizes elementares tais que $E_k ... E_1 A = \mathrm{Id}$.
b) Escreva A^{-1} como um produto de k matrizes elementares.
c) Escreva A como um produto de k matrizes.

28. Mostre que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

não é invertível para quaisquer entradas a, b, c, d, e, f, g, h reais.

29. Utilizando o Método de Gauss-Jordan, calcule, sempre que existir, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes.

$$a) \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

30. Calcule, sempre que existir, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes

$$a) \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \qquad b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad c) \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$$

em que k_1, k_2, k_3, k_4 e k são reais.

31. Senda A e B duas matrizes $n \times n$ invertíveis, diga justificando quais das matrizes seguintes são invertíveis, indicando nesses casos a expressão da matriz inversa. Nos casos em que a matriz não seja necessariamente invertível, ilustre as diferentes possibilidades através de exemplos.

$$a) AB \qquad b) A + B \qquad c) A^{-1}B \qquad A^pB^qA^{-q}B^{-q} (p, q \in \mathbb{N})$$

32. Sejam A e B duas matrizes quadradas $n \times n$ tais que $AB = I_n$. Calcule a matriz $BA^2 - A$.

Matrizes em blocos

33. Determine as matrizes X, Y e Z em termos de A, B e C, fazendo as hipóteses necessárias nas dimensões das matrizes, por forma a que se verifiquem as igualdades. (I designa a matriz identidade).

$$(a) \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ Z & 0 \end{bmatrix} \qquad (b) \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ Y & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & Z \\ 0 & 0 \\ B & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

34. Uma matriz da forma $A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$ é designada por uma matriz triangular superior por blocos. Supondo que A é invertível e que B e D são matrizes quadradas respectivamente $p \times p$ e $q \times q$, determine A^{-1}.

35. Use o exercício anterior para calcular a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Exercícios de escolha múltipla

36. Para a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, diga qual das afirmações seguintes é verdadeira.

☐ A característica de A é 3.
☐ A característica de A é 2.
☐ A característica de A depende dos valores de α e de β.
☐ A característica de A é 1.

---

37. A matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz elementar. Sendo B uma matriz 2×2, então BA é a matriz que se obtém de B:

☐ trocando a 1º linha com a 2º linha .
☐ trocando a 1º coluna com a 2º coluna .
☐ substituindo a 2º linha de B pela soma da 2º linha com a 1º multiplicada por 2.
☐ substituindo a 2º coluna de B pela soma da 2º coluna com a 1º multiplicada por 2.

---

38. Considere o sistema de equações lineares representado matricialmente por

$$\begin{bmatrix} 3-i & 1 & 5i & 4-i \\ 0 & 3 & -2i & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

onde α é um parâmetro complexo.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) Qualquer que seja o valor de $\alpha \in \mathbb{C}$, o sistema de equações é impossível.

B) Qualquer que seja o valor de $\alpha \in \mathbb{C}$, o sistema de equações é possível e tem grau de indeterminação 2.

C) Qualquer que seja o valor de $\alpha \in \mathbb{C}$, o sistema de equações é possível e tem grau de indeterminação 3.

D) Existem valores de α para os quais o sistema de equações é impossível.

---

39. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira para A uma matriz quadrada e b um vector não nulo.

☐ Se x é solução do sistema $Au = 0$ e y solução do sistema $Au = b$, então $(x - y)$ é solução de $Au = b$.

☐ Se x é solução do sistema $Au = 0$ e y solução do sistema $Au = b$, então $(x - y)$ é solução de $Au = -b$.

☐ Se x é uma solução de $Au = 0$ então necessariamente $x = 0$.

☐ Se A não é invertível então $x = 0$ é a única solução de $Au = 0$.

---

40. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz inversa de A. Então a solução do sistema $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ é

☐ $(3, 4, 0)$. ☐ $(4, 4, 0)$. ☐ $(4, 9, 1)$. ☐ $(2, 9, 1)$.

Exercício resolvido

41. Faça a discussão do sistema homogéneo $A_\alpha x = 0$ em termos do parâmetro α, onde

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -\alpha^2 & \alpha^2 \\ 2 & 2 & -2 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Resolução: Aplique-se o método de eliminação de Gauss à matriz dos coeficientes do sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & -\alpha^2 & \alpha^2 \\ 2 & 2 & -2 & \alpha \end{bmatrix} \overrightarrow{L1 \leftrightarrow L2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -\alpha^2 & \alpha^2 \\ 2 & 2 & -2 & \alpha \end{bmatrix} \overrightarrow{L3 - 4L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4-\alpha^2 & \alpha^2-4 \\ 2 & 2 & -2 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{L4 - 2L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4-\alpha^2 & \alpha^2-4 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-2 \end{bmatrix}.$$

Note que a característica de A_α é :

$$\mathrm{car}(A_\alpha) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad \alpha = 2 \\ 3 & \text{se} \quad \alpha = -2 \\ 4 & \text{se} \quad \alpha \neq \pm 2 \end{cases}$$

Logo, para $\alpha \neq \pm 2$ o sistema tem exclusivamente a solução nula.

O sistema dado é equivalente ao sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & - & z & + & w = & 0 \\ & & y & + & z & + & w = & 0 \\ & & & & (4-\alpha^2)z & + & (\alpha^2-4)w = & 0 \\ & & & & & & (\alpha-2)w = & 0. \end{array}\right. \tag{1}$$

Quando $\alpha = 2$ o sistema (1) reduz-se às duas primeiras equações. Resolvendo a segunda equação obtemos $y = -z - w$ e substituindo na primeira equação vem $x = 2z$. Logo a solução geral do sistema (para $\alpha = 2$) é:

$$\begin{aligned} &\{(x, y, z, w) :\ y = -z - w \wedge x = 2z \wedge z \in \mathbb{R} \wedge w \in \mathbb{R}\} = \\ &\qquad = \{(2z, -z - w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Quando $\alpha = -2$ o sistema reduz-se a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & - & z & + & w = & 0 \\ & & y & + & z & + & w = & 0 \\ & & & & & & -4w = & 0. \end{array}\right.$$

Logo, da última equação vem $w = 0$, que substituido nas duas primeiras equações dá $y = -z$ e $x = 2z$. A solução geral do sistema (para $\alpha = -2$) é:

$$\{(x, y, z, w) :\ y = -z \wedge x = 2z \wedge z \in \mathbb{R}\} = \{(2z, -z, z, 0) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Concluindo:

O sistema é sempre possível pois é um sistema homogéneo.

Se $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq -2$ o sistema é determinado com solução única $(0, 0, 0, 0)$.

Se $\alpha = 2$ o sistema é indeterminado com grau de indeterminação 2 e solução geral:

$$\{(2z, -z - w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\}.$$

Se $\alpha = -2$ o sistema é indeterminado com grau de indeterminação 1 e solução geral:

$$\{(2z, -z, z, 0) : z \in \mathbb{R}\}.$$