Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. de Materiais, Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química

1º Semestre — 11 Dez. 2006 - v. II

Nome:	
Número:	Curso:

Duração: 1H:30M
Cotação das perguntas de escolha múltipla: Correcta: 1.0 v. Errada: -0,3v.
Instruções:

- **Desligue completamente o seu telemóvel.**
- Não é permitido usar calculadoras.
- Todas as perguntas devem ser respondidas neste enunciado.

A preencher pelo docente

Correctas	Erradas	Total esc. múlt.:	
8.	9.	10.	11.
12.a)b)	12.c)	13.1.	13.2.
Nota:			

---

1. Considere o espaço vectorial real $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas 2×2, munido das operações habituais, e a seguinte lista de afirmações: **[1.0]**

I) $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é um espaço vectorial de dimensão 4.

II) O conjunto $\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a+b=1\}$ é um subespaço vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

III) O subespaço $\{M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : M = M^T\}$ tem dimensão 3.

IV) Existe uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que inclui os vectores
$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$ e $M_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

A lista **completa** de afirmações correctas é

☐ I e II ☐ I e III ☐ II e III ☐ II e IV

---

2. Seja $P = \{(x, y, z, w, t) \in \mathbb{R}^5 : x + y = 1 \text{ e } 2z + w = 20\}$ e r a recta $(0, 0, 0, 0, 20) + \langle (1, -1, 0, 1, 0) \rangle$. Qual das afirmações seguintes é verdadeira? **[1.0]**

☐ P é um plano.
☐ A recta r não está contida em P.
☐ Para definir r por um sistema de equações cartesianas são necessárias pelo menos 5 equações.
☐ A recta r é paralela a P.

---

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ e sejam $u = (3, 6)$, $v = (1, -1)$. **[1.0]**

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

☐ u e v são vectores próprios de A.
☐ u é vector próprio de A e v não é vector próprio de A.
☐ u não é vector próprio de A e v é vector próprio de A.
☐ Nem u nem v são vectores próprios de A.

---

4. Seja A uma matriz real cujo polinómio característico é $p_A(x) = x^2(1-x)(2-x)$ e tal que a característica de A é 2. Considere a seguinte lista de afirmações: **[1.0]**

I. A é uma matriz de tipo 4×4
II. A matriz A não é diagonalizável.
III. A matriz A é invertível.
IV. Zero é valor próprio de A.

A lista **completa** de afirmações correctas é:

☐ II e III ☐ II ☐ I e IV ☐ III e IV

---

5. Considere em $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual, o subespaço **[1.0]**

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y - w = 0\},$$

e a seguinte lista de afirmações:

I. $\dim W = \dim W^{\perp}$

II. O vector $(0, 0, 1, 0)$ pertence a $W^{\perp}$.

III. O vector $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1, \sqrt{12})$ pertence a W.

IV. $\dim W^{\perp} = 1$.

A lista **completa** de afirmações correctas é:

☐ I e IV ☐ II e III ☐ I e II ☐ III e IV

---

6. Seja A uma matriz quadrada tal que $\{(1, 0, 1), (1, -1, 1)\}$ é uma base do núcleo de A^T. **[1.0]**

Diga qual das seguintes afirmações é verdadeira:

☐ O espaço das linhas de A^T não é gerado por $(1, 0, -1)$.
☐ O espaço das colunas de A é gerado pelo vector $(1, 0, -1)$.
☐ A tem três valores próprios distintos.
☐ $\{(1, 0, 1)\}$ pode ser uma base do núcleo de A.

---

7. Considere o sistema $Ax = b$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, e a seguinte lista de afirmações: **[1.0]**

I. Uma solução de mínimos quadrados para $Ax = b$ é um vector x^* tal que $\|b - Av\| \leq \|b - Ax^*\|$ para todo o $v \in \mathbb{R}^2$.

II. Se x^* é uma solução de mínimos quadrados para $Ax = b$ então $(Ax^* - b)$ pertence ao núcleo de A^T.

III. O sistema $Ax = b$ tem uma única solução de mínimos quadrados.

IV. Uma solução de mínimos quadrados para $Ax = b$ é um vector $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $A^T v = b$.

A lista **completa** de afirmações correctas é

☐ I e IV ☐ II e III ☐ I e II ☐ III e IV

---

8. Considere $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno $\langle x\,,\, y\rangle = x^T A\, y$ onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $x, y \in \mathbb{R}^2$ são vectores coluna. Complete de modo a obter afirmações verdadeiras relativamente a este produto interno:

i) $||(1,1)|| =$ ...... **[0.4]**
ii) O coseno do ângulo entre $(1,1)$ e $(2,0)$ é ...... **[0.4]**
iii) $\text{proj}_{(1,1)}\ (2,0) =$ .... **[0.4]**
iv) $B = ((1,0),(0,1))$ .... uma base ortonormada de $\mathbb{R}^2$. **[0.4]**
v) Sendo $\mathbf{t}$ o vector .... $B = ((1,1),\mathbf{t})$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$. **[0.4]**

---

9. Complete, se possível, a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ \frac{1}{2} & ... & ... \end{bmatrix}$, de forma a que A seja uma matriz ortogonal. **[1.2]**

Justifique convenientemente todas as respostas às questões seguintes

---

10. Considere em $\mathbb{R}^3$, munido do produto interno usual, os vectores $u = (2,3,2)$ e $v = (1,1,3)$. Sendo W um subespaço de $\mathbb{R}^3$ tal que $v \in W$ e $u - v \in W^{\perp}$, determine a distância de u a W. **[1.1]**

11. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $(2, -2, 0, 1)$ e $(1, 1, 0, 3)$. **[1.0]**

Dê um exemplo, se for possível, de uma matriz A com 3 linhas tal que o complemento ortogonal do núcleo de A seja W e tal que o vector $(2, 1, 3)$ pertença ao espaço de colunas de A .

12. Seja $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz tal que o núcleo de $(A - 3I_3)$ é gerado pelos vectores $(1, -1, 0)$ e $(2, 0, 0)$ e tal que $A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}^T$

a) Escreva o polinómio característico de A. **[0.6]**

b) Diga, justificando, se A pode ser uma matriz simétrica. **[0.3]**

c) Diga, justificando, se A é diagonalizável. No caso de o ser determine uma matriz S tal que $S^{-1}AS$ seja diagonal. Indique ainda a matriz diagonal correspondente à matriz S que calculou. **[1.3]**

13. Diga, justificando se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

1. Seja A uma matriz real de tipo $m \times n$ e b um vector não nulo que pertence ao núcleo de A^T. Então o sistema de equações lineares $Ax = b$ não tem solução. **[1.3]**

2. Se A é a matriz quadrada de ordem 5 cujas entradas são todas iguais a 1, então A é semelhante à matriz $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. **[1.2]**