Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química
1º Semestre — 3 Jan. 2007

Respostas do 1º Teste

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$. Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira **[1.4]**

☐ $\det(A) = 0$ para qualquer α.
☐ A é invertível para qualquer α.
☐ Existe pelo menos um valor de α para o qual o sistema $AX = 0$ tem grau de indeterminação 3.
☒ Existe pelo menos um valor de α para o qual a característica de A é igual a 3.

---

2. Seja A a matriz tal que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Considere as seguintes afirmações: **[1.4]**

I. O sistema $Ax = b$ é possível e determinado.
II. O sistema $Ax = b$ tem como única solução $x = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$.
III. A característica da matriz aumentada $[A|b]$ é igual a 4.
IV. Se x_0 é solução de $Ax = 0$ e y_0 solução de $Ax = b$ então $x_0 + y_0 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$.

A lista **completa** de afirmações correctas é:

☐ I e IV ☒ I, II e IV ☐ II e III ☐ II e IV

---

3. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Considere a seguinte lista de afirmações: **[1.4]**

I. Se $A^2 = A$ então $\det(A) = 0$ ou $\det(A) = 1$.
II. Se $\det(A) = 0$ então A tem duas linhas iguais.
III. Se as colunas de A são linearmente independentes então A não tem duas linhas iguais.
IV. Se $\det(A) \neq 0$ então A não tem zeros na diagonal principal.

A lista **completa** de afirmações correctas é:

☐ I e IV ☐ I, II e IV ☐ II e III ☒ I e III

---

4. Sejam A e B duas matrizes 3×3 tais que $\det(2AB) = 96$ e $\det\left(\left(AB^{-1}\right)^3\right) = 27$. Sabendo que $\det(B) > 0$, então: **[1.4]**

☒ $\det(A) = 6$ e $\det(B) = 2$ ☐ $\det(A) = 3$ e $\det(B) = \frac{1}{2}$
☐ $\det(A) = 3$ e $\det(B) = 1$ ☐ $\det(A) = \frac{1}{2}$ e $\det(B) = 6$

---

5. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$ e as afirmações seguintes: **[1.4]**

I. Os vectores $(2,5,1)$ e $(3,5,3)$ são linearmente independentes.
II. Os vectores $(1,3,0), (4,12,0)$ e $(1,1,1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.
III. Os vectores $(\pi,1,0), (1,\frac{1}{3},5), (-3,1,1)$ e $(0,32,2)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.
IV. O vector $(\sqrt{2},0,\sqrt{2})$ é combinação linear dos vectores $(1,1,1)$ e $(0,3,0)$.

A lista completa das afirmações correctas é:
☒ I e IV ☐ I e III ☐ II e IV ☐ III e IV

---

6. Seja $B = (v_1, v_2, v_3)$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ tal que **[1.4]**

$$v_1 = (0,1,0) \qquad v_2 = (1,3,1) \qquad v_3 = (-1,0,0)\ .$$

Considere as afirmações seguintes:

I. O vector $v_B = (0,1,-1)$ é o vector das coordenadas de $v = (2,3,1)$ na base B.
II. O vector das coordenadas de v_1 na base B é $(v_1)_B = (0,1,0)$.
III. O vector das coordenadas de $w = (5,0,0)$ na base B é $w_B = (0,0,-5)$.
IV. O vector das coordenadas de $u = v_1 + v_2 + v_3$ na base B é $u_B = (0,4,1)$.

A lista completa das afirmações correctas é:
☐ I, II e III ☒ I e III ☐ II e IV ☐ I e IV

---

7. Indique qual dos conjuntos seguinte é um subespaço linear de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 3. **[1.4]**

☐ $V = \text{Span}\{(1,1,0,0), (0,0,1,0), (1,1,-1,0)\}$
☐ $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : z + 2w = 0,\ y - x = 1 \text{ e } x = 0\}$
☒ $S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y - x + z + 2w = 0\}$
☐ $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 :\ x = y = z = w\}$

---

8. Seja A uma matriz 20×10 com entradas reais tal que $\dim EL(A) = 5$. Complete de forma a obter afirmações verdadeiras:

a) $\dim N(A^T) = 15$ **[0.7]**
b) O núcleo de A é um subespaço de $\mathbb{R}^{10}$ **[0.7]**
c) O sistema homogéneo $Ax = 0$ tem grau de indeterminação 5 **[0.7]**

---

9. Complete a matriz **[0.9]**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ 2 & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

por forma a que $\dim EC(A) = 2$ e $(-1, -2, 1)$ pertença ao núcleo de A.

Resposta possível: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

---

10. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$ **[2.0]**

$$S = \operatorname{Span}\{(0,1,1), (2,2,0), (2,1,-1)\}$$

Determine uma base para S e um sistema de equações que defina S.

Resposta possível: $((0,1,1),(2,2,0))$ é uma base de S e

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}.$$

---

11. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & 4 & 0 \\ \alpha^2 & \alpha^2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$ e o vector $b = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

a) a discussão do sistema $Ax = b$ em termos dos parâmetros reais α e β, indicando em cada caso a solução geral desse sistema. **[3.0]**

Resolução abreviada: Usando o método de eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 4 & 0 & | & 0 \\ \alpha^2 & \alpha^2 & 1 & | & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & | & \beta \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \alpha & 4 & 0 & | & 0 \\ 0 & \alpha^2 - 4\alpha & 1 & | & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & | & \beta \end{bmatrix}$$

Se $\alpha \neq 4$ e $\alpha \neq 0$, a característica de A é 3 e portanto o sistema é possível e determinado, qualquer que seja o valor de β, tendo solução

$$z = \beta/\alpha$$

$$y = (\alpha - \beta/\alpha)/(\alpha^2 - 4\alpha)$$

$$x = -4((\alpha - \beta/\alpha)/(\alpha^3 - 4\alpha^2)$$

Se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 4$ a caracterıstica de A é menor do que 3 e faz-se a análise abaixo.

i) Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ o sistema é impossível.

ii) Se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, a matriz aumentada do sistema é

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} .$$

A solução do geral do sistema é

$$\{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\} .$$

Assim o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação igual a 1.

iii) Se $\alpha = 4$, tem-se

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 4 & | & \beta \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & \beta - 16 \end{bmatrix} .$$

Para $\beta \neq 16$, o sistema é impossível. Para $\beta = 16$, a solução geral do sistema é

$$\{(x, -x, 4) : x \in \mathbb{R}\} .$$

Assim o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação igual a 1.

b) Determine os valores de α para os quais a matriz A é invertível. **[1.0]**

Resposta: A matriz A é invertível se e só a sua caracteristica for 3 donde (pela alínea anterior), A é invertível para todos os números reais diferentes de 0 e 4.

12. Seja A uma matriz $n \times n$ com n ímpar que verifica $A = -A^T$. Mostre que A não é invertível. **[1.2]**

Resolução abreviada: Pelas propriedades dos determinantes e pelo facto de n ser ímpar temos $\det -A^T = -\det A$. Com a hipótese $A = -A^T$ obtemos então $\det A = -\det A$ donde $\det A = 0$ e portanto A não é invertível.

Respostas do 2º Teste

13. Seja A uma matriz de característica 1 e $p(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 1)$ o seu polinómio característico. Considere a seguinte lista de afirmações: **[1.4]**

I. $\det(A - I) = 0$.
II. A matriz A é invertível.
III. A matriz A é diagonalizável.
IV. A multiplicidade geométrica do valor próprio zero é 1.

A lista completa de afirmações correctas é:

☐ II e IV ☐ I e IV ☐ II e III ☒ I e III

---

14. Considere a matriz real **[1.4]**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix},$$

Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira

☒ Se $(2, 2)$ é vector próprio de A então $\alpha + \beta = 5$.
☐ Se $\alpha = \beta = 0$, então zero não é valor próprio de A.
☐ Se $(3, -2)$ é vector próprio de A então $3\beta = 2\alpha$.
☐ Se $\alpha = 0$, então β não é valor próprio de A.

---

15. Seja $P = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 2\}$ e r a recta $(1, 0, 0, 20) + \langle(2, -1, -1, 0)\rangle$. Qual das afirmações seguintes é verdadeira? **[1.4]**

☐ P é um plano.
☐ A recta r está contida em P.
☒ A recta r é paralela a P.
☐ Para definir r por um sistema de equações cartesianas bastam 2 equações.

---

16. Considere um plano P e o triângulo em P de vértices $V_1 = (1, 0, 1)$, $V_2 = (0, 1, 1)$ e $V_3 = (0, 0, 0)$. Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira. **[1.4]**

☐ A recta $\{(x, x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ é perpendicular ao plano P.
☐ O triângulo não é equilátero.
☒ A altura da pirâmide triangular de vértices V_1, V_2, V_3 e $V = (1, \sqrt{3}, 1)$ é igual a 1.
☐ A recta $\{(x, x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ está contida no plano P.

---

17. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira: **[1.4]**

☐ O complemento ortogonal do espaço das linhas de A é $\{(x, 3x) : x \in \mathbb{R}\}$.
☒ O complemento ortogonal do espaço das colunas de A é $\{(x, 3x) : x \in \mathbb{R}\}$.
☐ O complemento ortogonal do núcleo de A é $\{(x, 3x) : x \in \mathbb{R}\}$.
☐ O complemento ortogonal do núcleo de A^T é $\{(x, 3x) : x \in \mathbb{R}\}$.

---

18. Seja A uma matriz 3×2 de característica máxima e tal que as entradas da primeira coluna de A são todas iguais a 1. Considere a lista de afirmações seguinte, onde b designa um vector não nulo de $\mathbb{R}^3$ e $u \in \mathbb{R}^2$. **[1.4]**

I. Se o sistema $Ax = b$ tem solução única de mínimos quadrados então A é invertível.
II. Se u e v são vectores de $\mathbb{R}^2$ que verificam $\|b - Au\| > \|b - Av\|$ então u pode ser uma solução de mínimos quadrados para $Ax = b$.
III. O sistema $Ax = b$ tem solução única de mínimos quadrados.
IV. Se $b - Au$ pertence ao núcleo de A^T, então u é uma solução de mínimos quadrados para $Ax = b$.

A lista completa das afirmações correctas é:

☐ I, II e IV ☐ I e IV ☒ III e IV ☐ I

---

19. Seja **[1.4]**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a matriz que representa uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ relativamente às bases canónicas. Considere as afirmações seguintes:

I. A imagem de T é $\mathbb{R}^2$.
II. A transformação linear T é um isomorfismo.
III. $T(-1, 1, -1) = (-1, 1)$
IV. O núcleo de T é um plano.

A lista completa das afirmações correctas é:
☐ II e IV ☒ I e III ☐ II e III ☐ I e IV

---

20. Complete, se possível, a matriz $A = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & 1/4 \end{bmatrix}$ **[1.0]**

de forma a que A seja uma matriz ortogonal.

Resposta possível: $A = \begin{bmatrix} -1/4 & \sqrt{15}/4 \\ \sqrt{15}/4 & 1/4 \end{bmatrix}$

---

21. Seja P_2 o espaço linear dos polinómios de grau menor ou igual a 2 e $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ a matriz que representa a transformação linear $T : P_2 \to P_2$ relativamente à base ordenada $(1, x, x^2)$ no espaço de partida e à base ordenada $(x, x^2, 5)$ no espaço de chegada.

Complete por forma a obter afirmações verdadeiras:

a) $T(x - x^2) = 10 - 4x + x^2$ **[0.4]**
b) O vector (3,0,1) não pertence à imagem de T. **[0.4]**
c) A transformação linear T não é sobrejectiva. **[0.4]**

---

22. Complete as matrizes A e b abaixo por forma a que se verifique: **[1.2]**

- para determinar o polinómio de grau dois cujo gráfico melhor se ajusta aos pontos da tabela

x	1	2	-1	-2
y	1	4	3	-2

  determina-se uma solução de mínimos quadrados para o sistema $Au = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Justifique convenientemente todas as respostas às questões seguintes (23, 24, 25)

---

23. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por **[2.0]**

$$T(x, y) = (2x - y, x + y, x + 3y).$$

a) Escreva a matriz A que representa T em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Resposta: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

b) Sendo $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $S(x, y, z) = (x - y, y - z)$, escreva a expressão geral de $S \circ T$.

Resposta: Para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos $S \circ T(x, y) = (x - 2y, -y)$.

24. Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Escreva o polinómio característico de A e diga qual é a multiplicidade algébrica de cada valor próprio de A. **[1.0]**

Resposta: Temos $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Fazendo os cálculos obtemos $p_A(\lambda) = (4 - \lambda)^2(-2 - \lambda)$.

Assim os valores próprios de A são 4, com multiplicidade algébrica 2 e -2 com multiplicidade algébrica 1.

b) Diga, justificando, se A é diagonalizável. No caso de o ser determine uma matriz S tal que $S^{-1}AS$ seja diagonal. Indique ainda a matriz diagonal correspondente à matriz S que calculou. **[1.8]**

Resposta: O subespaço próprio $E(4)$, associado ao valor próprio 4, coincide com o núcleo da matriz $A - 4I$. Tem-se

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e portanto

$E(4) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -2x + 6y\}$, donde $((1, 0, -2), (0, 1, 6))$ é uma base de $E(4)$ e concluimos que a multiplicidade geométrica de 4 é 2.

Análogamente $E(-2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ e } z = 0\}$,donde $((0, 1, 0))$ é uma base de $E(-2)$.

A multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica coincidem para cada valor próprio e, portanto a matriz A é diagonalizável, i.e. existe uma matriz diagonal D e existe uma matriz invertível S tais que $D = S^{-1}AS$.

Tem-se então que uma matriz diagonal D semelhante a A é, por exemplo,

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

e uma correspondente matriz diagonalizante é

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 6 & 0 \end{bmatrix} .$$

25. Sejam A e B matrizes 6×4 tais que $A^T B$ é invertível.

a) Mostre que o complemento ortogonal do espaço das linhas de B é $\{0\}$. **[1.0]**

b) Mostre que zero é um valor próprio de BA^T. (Sugestão: estude BA^T quanto à invertibilidade). **[1.0]**

Resolução abreviada:

a) O complemento ortogonal do espaço das linhas de B é o núcleo de B. Como o núcleo de B está contido no núcleo de $A^T B$ e o núcleo desta matriz é $\{0\}$ (uma vez que é invertível), então o núcleo de B também é $\{0\}$.

b) A matriz A^T é uma matriz 4×6 e portanto o seu núcleo é sempre diferente de $\{0\}$, uma vez que A^T tem no máximo característica 4. Como o núcleo de A^T está contido no núcleo de BA^T, concluimos que o núcleo de BA^T é diferente de $\{0\}$ e portanto 0 é valor próprio de BA^T.